AM 1 – 20/10/2011 Test di Prova.

(1) Trovare $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo che $L \neq 0, +\infty$,

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{(n^2+1)^3 + n^5} - n^3}{n^\alpha}$$

(2) Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua, ~~[illegible]~~

supponiamo che $f(0) = 1$ e $f(1) = 3$.

Quale delle seguenti affermazioni segue necessariamente dalle ipotesi?

(i) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

(ii) $\exists x \in [0,1] : f(x) = 2 \cdot x^2$

(iii) $\exists x_M \in [0,1] : \forall x \in [0,1] \Rightarrow f(x) \leq f(x_M)$

(iv) f è crescente: $\forall x \leq y$ in $[0,1] \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

(3) Sia $y = f(x) = x^2$ l'equazione di una parabola fissata. Data un'altra parabola $y = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R};\ a \neq 0)$, trovare $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ e $k \in \mathbb{R}$ in modo che la sua equazione abbia la forma

$$y - \beta = f\left(\frac{x - \alpha}{k}\right)$$

(4) Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{se } x \leq 1 \\ (x+1)^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Trovare a in modo che f sia continua. Giustificare la risposta.

AM2 – 20/10/2011 Test di prova.

① Classificare i punti critici di

$$f(x,y) = (x^2 - y^2 - 1)\cdot(x-2)+1$$

② Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Scrivere $\|\nabla f\|^2$ in coordinate polari.

Cioè, posti $F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ e $g = f \circ F$, (i) calcolare ∇g e (ii) esprimere l'espressione $\|\nabla f\|^2$ in termini di $\nabla g, r, \theta$.

③ Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ e si definisca $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(t) = f(\cos(t), \sin(t), t).$$

Calcolare $h'(t)$.

④ Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ in ogni punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Quali delle seguenti affermazioni vale necessariamente?

(i) $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

(ii) $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

(iii) Se $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono continue in $\mathbb{R}^2$, allora

$$\exists (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \forall (x,y): x^2+y^2 \le 1 \Rightarrow f(x,y) \le f(x_0,y_0)$$

(iv) Se $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono continue in $\mathbb{R}^2$, allora

$$\exists (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \forall (x,y): x^2-y^2 \le 1 \Rightarrow f(x,y) \le f(x_0,y_0)$$