# Prova scritta di Analisi Matematica I (20/6/2012)

Nome............................................Cognome................................................ Matricola.................

**Prove orali: inizio appello/fine appello.**

(1) [8 pt] Studiare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^{\frac{|x^2+x-15|}{x}}.$$

- Determinare il dominio di $f$, gli intervalli su cui $f$ è continua e i limiti di $f$ agli estremi di questi intervalli.

- Trovare i punti in cui la funzione $f$ è derivabile e calcolarne la derivata.

- Trovare gli intervalli su cui $f$ è, rispettivamente, crescente o decrescente.

- Trovare punti di massimo e minimo relativo.

- Tracciare un grafico qualitativo di $f$.

**(2)** [4 pt] Calcolare il limite di funzione

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{e^{4x}} - e^{1+4x}}{e^{3x} - (1+3x)}.$$

**(3)** [4 pt.] Calcolare

$$\int_0^1 \log\left[(x+1)^2 + 9\right] dx.$$

**(4)** [3 pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$(z+4i)^2 - 5(z+4i) + 6 = 0$$

**(5)** [2 pt] Per quali valori di $\gamma > 0$ si ha la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-n}}{n^\gamma + n^{4\gamma}}$$

**(6)** [4 pt. se esatto, $-1$ pt. se errato, 0 pt. se non fatto.] Siano $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue in $[0,1)$ e si supponga che $f(0) = 0 = \lim_{x\to 1} g(x)$ e che $g(0) = 1 = \lim_{x\to 1} f(x)$.

Quale delle seguenti affermazioni segue *necessariamente* dalle ipotesi?

- $f(1) > g(1)$
- Esiste $x \in [0,1)$ tale che $f(x) = g(x)$.
- Esiste $x \in [0,1)$ tale che $f'(x) + g'(x) = 0$.
- Per ogni $x \in [0,1)$ si ha che $f(x) + g(x) = 1$.

**(7)** [3 pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, e sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \int_1^x f(t^4)dt.$$

Calcolare

$$h'(x).$$

**(8)** [2 pt] Calcolare il limite di successione

$$\lim_{n\to\infty} \left[ e\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n + \pi\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} + \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \right].$$

AM1 - 20/6/2012. 

(1) $\boxed{\text{Dominio}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)}$ e $\boxed{f \in C^1((-\infty,0)\cup(0,+\infty))}$.

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{+\infty} = +\infty}$; $\boxed{\lim_{x\to -\infty} f(x) = e^{-\infty} = 0}$; $\boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = e^{+\infty} = +\infty}$; $\boxed{\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0}$

Osservo che $f(x) > 0 \ \forall x \in \text{Dominio}(f)$.

Se $x^2+x-15 \neq 0$ e $x \neq 0$, $\exists f'(x) = e^{\frac{|x^2+x-15|}{x}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{|x^2+x-15|}{x}\right)$

$= e^{\frac{|x^2+x-15|}{x}} \cdot \frac{d}{dx} \frac{\text{sgn}(x^2+x-15)\cdot(x^2+x-15)}{x} =$

$= e^{\frac{|x^2+x-15|}{x}} \cdot \text{sgn}(x^2+x-15) \cdot \frac{d}{dx}\left(\cancel{x}+1-\frac{15}{x}\right) = e^{\frac{|x^2+x-15|}{x}} \cdot \text{sgn}(x^2+x-15)\cdot\left(1+\frac{15}{x^2}\right)$

Poichè $x^2+x-15 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{61}}{2}$ ho che

$$\boxed{\forall x \neq 0, \frac{-1 \pm \sqrt{61}}{2} \Rightarrow \exists f'(x) = \underbrace{e^{\frac{|x^2+x-15|}{x}}}_{A} \cdot \underbrace{\text{sgn}(x^2+x-15)}_{B} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{15}{x^2}\right)}_{C}}$$

Osservo che $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ se $x_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{61}}{2}$, quindi

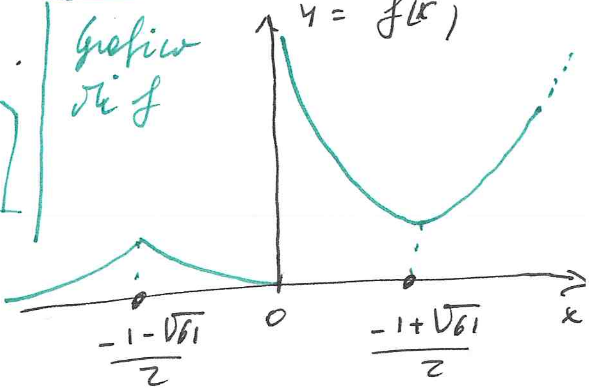
$$\boxed{\text{Dominio}(f') = \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{-1\pm\sqrt{61}}{2}\right\}}.$$

Studio il segno di $f'(x) = A \cdot B \cdot C$: osservo che $A > 0$ e $C > 0 \ \forall x$.

Basta studiare $\text{sgn}(x^2+x-15) > 0$; cioè $x^2+x-15 > 0$

$f'(x) \geq 0 \iff x \leq \frac{-1-\sqrt{61}}{2}$ o $x \geq \frac{-1+\sqrt{61}}{2}$.

grafico di $f$




$\boxed{f \text{ cresce in } \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{61}}{2}\right] \text{ e } \left[\frac{-1+\sqrt{61}}{2}, +\infty\right)}$

$\boxed{f \text{ decresce in } \left[\frac{-1-\sqrt{61}}{2}, 0\right) \text{ e } \left(0, \frac{-1+\sqrt{61}}{2}\right]}$

$\boxed{x = \frac{-1+\sqrt{61}}{2} \text{ è p.to di MAX. rel.}}$

$\boxed{x = \frac{-1-\sqrt{61}}{2} \text{ è p.to di min. rel.}}$

(2) $e^{e^{4x}} - e^{1+4x} = e^{1+4x} \cdot \left(e^{e^{4x}-(1+4x)} - 1\right)$ proprietà delle potenze

$\underset{x\to 0^+}{\sim} e^{1+4\cdot 0}\left[e^{4x} - (1+4x)\right]$ poichè $e^y - 1 \underset{y \to 0}{\sim} y$ e $y = e^{4x}-(1+4x) \underset{x\to 0}{\to} 0$

$\Rightarrow \frac{e^{e^{4x}} - e^{1+4x}}{e^{3x} - (1+3x)} \underset{x\to 0^+}{\sim} e \cdot \frac{e^{4x} - (1+4x)}{e^{3x}-(1+3x)} = e \cdot \frac{1+4x+\frac{(4x)^2}{2}+o(x^2)-(1+4x)}{1+3x+\frac{(3x)^2}{2}+o(x^2)-(1+3x)}$

$= e \cdot \frac{(4x)^2+o(x^2)}{(3x)^2+o(x^2)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e \cdot \frac{4^2}{3^2} = \boxed{\frac{16}{9} e}$

(3) $\int_0^1 \log[(x+1)^2+9]\,dx = \{(x+1)\cdot\log[(x+1)^2+9]\}_0^1 - \int_0^1 \frac{(x+1)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^2+9}\,dx$ integrando per parti

$= 2\log 13 - \log 10 - 2\cdot\int_0^1 \frac{(x+1)^2+9-9}{(x+1)^2+9}\,dx$

$= 2\log 13 - \log 10 - 2 + 2\cdot\int_0^1 \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1} = 2\log 13 - \log 10 - 2 + 2\cdot 3\cdot\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{3}\right)\right]_0^1$

$= \boxed{2\log 13 - \log 10 + 6\cdot[\operatorname{arctg}(2/3) - \operatorname{arctg}(1/3)]}$

(4) $w^2-5w+6 = (w-2)(w-3)$ : lo trovo p.es. risolvendo $w^2-5w+6=0$

Allora

$0 = (z+4i)^2 - 5(z+4i) + 6 = (z+4i-2)(z+4i-3)$

$\Leftrightarrow$ $z = 2-4i$ o $z = 3-4i$

(5) $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$ : $a_n = \frac{1-e^{-n}}{n^{\delta}+n^{4\delta}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^{4\delta}}$

quindi la serie converge $\Leftrightarrow$ $\sum \frac{1}{n^{4\delta}}$ converge

$\Leftrightarrow$ $4\delta > 1$ $\Leftrightarrow$ $\delta > 1/4$

(6) Certo $\exists x \in [0,1)$ : $f(x) = g(x)$.

Infatti, se pongo $\bar f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x\in[0,1) \\ \lim_{x\to 1} f(x) & \text{se } x=1 \end{cases}$ e $\bar g(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x\in[0,1) \\ \lim_{x\to 1} g(x) & \text{se } x=1 \end{cases}$

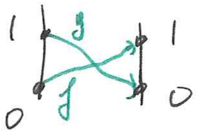
ho che $\bar f, \bar g \in C([0,1],\mathbb{R})$ e $h(x) = \bar f(x) - \bar g(x)$

soddisfa $h(0) = 0-1 < 0$ e $h(1) = \bar f(1) - \bar g(1) = 1-0 > 0$

$\Rightarrow$ $\exists x \in (0,1)$ : $0 = h(x) = \bar f(x) - \bar g(x) = f(x) - g(x)$ $\left(\text{perché } x \neq 1\right)$.

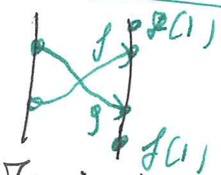
$\uparrow$

T. zeri.




$\boxed{\text{La seconda risposta è corretta}}$

La prima è scorretta: potrebbe essere




La terza non ha nemmeno senso se $f$ non è derivabile

La quarta è contraddetta p.es. da $f(x) = x^2$; $g(x) = 1-x$.

(7) Per il T.F.C.I. $\Rightarrow h'(x) = f(x^4)$

(8) Uso il limite $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n/x}\right]^x \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x$

ogni volta che $x \in \mathbb{R}$.

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{-1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-1}$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left[\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n\right]^n \xrightarrow[n\to\infty]{} (e^{-1})^{+\infty} = 0$$

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^0 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (\dots) = e \cdot e^{-1} + \pi \cdot 0 + \sqrt{2} \cdot 1 = 1+\sqrt{2}$$

# Prova scritta di Analisi Matematica II (20/6/2012)

Nome............................................Cognome................................................ Matricola.................

**Prova orale:** inizio appello/fine appello.

**(1)** **[14 pti]** Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme $\Omega = \{(x,y,z) : \; 0 \le x \le 1/2, \; 0 \le y \le 1/3, \; xy \le z \le xy+1\}$.

**(1.1)** Fare un disegno *qualitativo* di $\Omega$.

**(1.2)** Parametrizzare $\partial\Omega$ e dire se le parametrizzazioni scelte sono o meno compatibili con il campo $\nu$ normale a $\partial\Omega$ esternamente a $\Omega$.

**(1.3)** Sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale. Scrivere *una* formula esplicita che dia il flusso $\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu d\sigma$ di $F$ attraverso $\partial\Omega$. (Nella formula devono apparire, magari iterati, solo integrali di una variabile).

**(1.4)** Calcolare il flusso di cui al punto (1.3) quando $F(x,y,z) = (xz, 0, 0)$.

**(1.5)** . Sia $\Sigma = \{(x,y,z) \in \partial\Omega : \; z = xy\}$. Parametrizzare $\partial\Sigma$ e dire se le parametrizzazioni scelte sono compatibili con la normale $\nu$ a $\Sigma$ ($\nu$ essendo la normale di cui al punto (1.2)).

**(1.6)** Calcolare $\iint_\Sigma (\nabla \times F) \cdot \nu d\sigma$, con $F \in C^1(\Sigma, \mathbb{R}^3)$, $F(x,y,z) = (xz, 0, 0)$.

**(2) [3 pti]** Dire per quale valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ il campo $F_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è esatto, dove

$$F_a(x,y) = \left(e^{x^2-y^2}(y\cos(axy) + x\sin(axy)), e^{x^2-y^2}(x\cos(axy) - y\sin(axy))\right).$$

Calcolarne un potenziale.

**(3) [4 pti]** Sia $A = \{(x,y) : \ 0 \le 2x+3y \le 1, \ 0 \le 3x-2y \le 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\iint_A (\sin[\pi(2x+3y)] + \cos[\pi(3x-2y)])\, dxdy.$$

**(4) [2 pti]** Trovare l'integrale generale di

$$y'' + 4y' = 4.$$

**(5) [2 pti]** Siano $f$ in $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e $\alpha$ in $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e si ponga

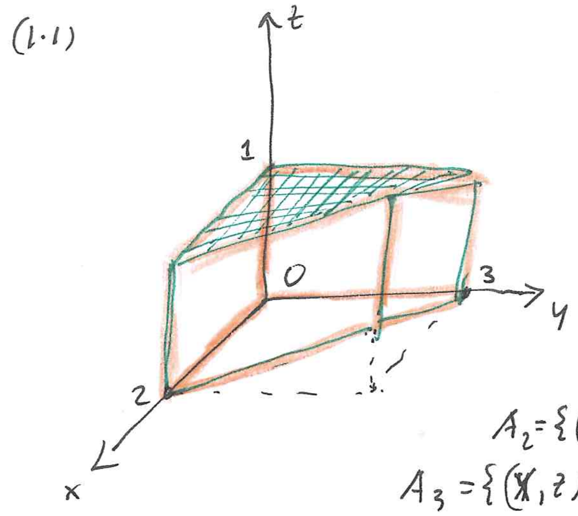
$$h(x, y) = \int_0^{\alpha(y)} f(x, t)dt.$$

Calcolare $\nabla h(x_0, y_0)$.

**(6) [5 pti]** Classificare i punti critici di $f(x, y) = (x^2 + y - 1)(x^2 - y - 2)y + 3$.

AM II - 20/6/2012 

(1.1)




(1.2) $\Sigma_1 = \{(0,y,z) : 0 \le y \le 3;\ 0 \le z \le 1\}$

$\Sigma_2 = \{(x,0,z) : 0 \le x \le 2;\ 0 \le z \le 1\}$

$\Sigma_3 = \{(2,y,z) : 0 \le y \le 3;\ 2y \le z \le 2y+1\}$

$\Sigma_4 = \{(x,3,z) : 0 \le x \le 2;\ 3x \le z \le 3x+1\}$

$[0,3]\times[0,1] \xrightarrow{\Phi_1} \Sigma_1 \subseteq \mathbb{R}^3 :\ \Phi_1(y,z) = (0,y,z)$

$[0,2]\times[0,1] \xrightarrow{\Phi_2} \Sigma_2 \subseteq \mathbb{R}^3 :\ \Phi_2(x,z) = (x,0,z)$

$A_2 = \{(y,z) : 0 \le y \le 3;\ 2y \le z \le 2y+1\} \xrightarrow{\Phi_3} \Sigma_3 : \Phi_3(y,z) = (2,y,z)$

$A_3 = \{(x,z) : 0 \le x \le 2;\ 3x \le z \le 3x+1\} \xrightarrow{\Phi_4} \Sigma_4 : \Phi_4(x,z) = (x,3,z)$

$\Sigma_5 = \{(x,y,xy) : (x,y) \in A_5 = [0,2]\times[0,3]\};\quad A_5 \xrightarrow{\Phi_5} \Sigma_5 : \Phi_5(x,y) = (x,y,xy)$

$\Sigma_6 = \{(x,y,1+xy) : (x,y) \in A_6 = A_5\};\quad A_6 = A_5 \xrightarrow{\Phi_6} \Sigma_6 : \Phi_6(x,y) = (x,y,xy+1)$

$(\partial_y \Phi_1 \times \partial_z \Phi_1)(y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,0,0) = (\partial_y \Phi_3 \times \partial_z \Phi_3)(y,z)$ : $\Phi_1$ non è compatibile, $\Phi_3$ lo è

$(\partial_x \Phi_2 \times \partial_z \Phi_2)(x,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0,-1,0) = (\partial_x \Phi_4 \times \partial_z \Phi_4)(x,z)$ : $\Phi_2$ è compatibile, $\Phi_4$ non lo è

$(\partial_x \Phi_5 \times \partial_y \Phi_5)(x,y) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = (-y,-x,1) = (\partial_x \Phi_6 \times \partial_y \Phi_6)(x,y)$ : $\Phi_5$ non è comp. $\Phi_6$ è compatibile.

(1.3) Se uso il Teorema della divergenza,

$$\iint_{\partial\Omega} F\cdot\nu\, d\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div} F\, dx\,dy\,dz = \int_0^2 dx \int_0^3 dy \int_{xy}^{xy+1} dz \cdot \operatorname{div} F(x,y,z)$$

Se non uso il Teorema della divergenza, posto $F=(P,Q,R)$ ho, utilizzando quanto fatto in (1.2): $\iint_{\partial\Omega} F\cdot\nu\, d\sigma =$

$$= \underbrace{-\int_0^3 dy \int_0^1 dz\, P(0,y,z)}_{\Sigma_1} + \underbrace{\int_0^3 dy \int_{2y}^{2y+1} dz\, P(2,y,z)}_{\Sigma_3} + \underbrace{\int_0^2 dx \int_0^1 dz\, (-Q(x,0,z))}_{\Sigma_2} \underbrace{- \int_0^2 dx \int_{3x}^{3x+1} dz\, (-Q(x,3,z))}_{\Sigma_4}$$

$$\left.- \int_0^2 dx \int_0^3 dy \left[-y\cdot P(x,y,xy) - x\cdot Q(x,y,xy) + R(x,y,xy)\right]\right\} \Sigma_5$$

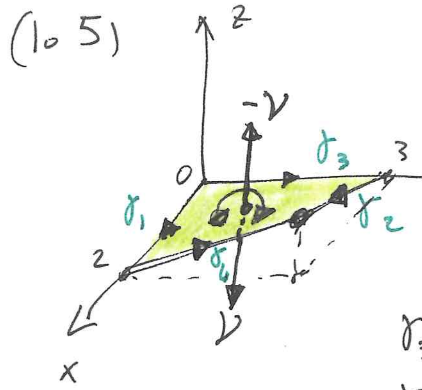
$$\left.+ \int_0^2 dx \int_0^3 dy \left[-y\cdot P(x,y,xy+1) - x\cdot Q(x,y,xy+1) + R(x,y,xy+1)\right]\right\} \Sigma_6$$

(1.4) $\operatorname{div} F(x,y,z) = z \Rightarrow \iint_{\partial\Omega} F\cdot\nu\, d\sigma = \int_0^2 dx \int_0^3 dy \int_{xy}^{xy+1} z\, dz = \int_0^2 dx \int_0^3 dy \left[\frac{z^2}{2}\right]_{xy}^{xy+1}$

$$= \int_0^2 dx \int_0^3 dy\ \frac{(xy+1)^2 - (xy)^2}{2} = \int_0^2 dx \int_0^3 dy \cdot \left(xy + \frac{1}{2}\right) = \int_0^2 x\, dx \cdot \int_0^3 y\, dy + \frac{1}{2}\int_0^2 dx \int_0^3 dy$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^2 \cdot \left(\frac{y^2}{2}\right)_0^3 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3 = 2\cdot\frac{9}{2} + 3 = 12 : \quad \boxed{\iint_{\partial\Omega} F\cdot\nu\, d\sigma = 12}$$

(1.5)




$\gamma_1(x) = (x,0,0)$; $\quad \dot\gamma_1(x) = (1,0,0) \quad \gamma_1 : [0,2] \to \mathbb{R}^3$

$\gamma_2(x) = (x,3,3x) \quad \dot\gamma_2(x) = (1,0,3) \quad \gamma_2 : [0,2] \to \mathbb{R}^3$

$\gamma_3(y) = (0,y,0) \quad \dot\gamma_3(y) = (0,1,0) \quad \gamma_3 : [0,3] \to \mathbb{R}^3$

$\gamma_4(y) = (2,y,2y) \quad \dot\gamma_4(y) = (0,1,2) \quad \gamma_3 : [0,2] \to \mathbb{R}^3$

$\gamma_3$ e $\gamma_2$ sono compatibili con $\nu$

$\gamma_1$ e $\gamma_4$ non sono compatibili con $\nu$.

(1.6) Se uso il T. di Stokes ho $\iint_\Sigma (\nabla \times F)\cdot \nu \, d\sigma = \left(-\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} - \int_{\gamma_4}\right) F(z)\cdot dz$

$$= -\int_0^2 x\cdot 0 \, dx + \int_0^2 x\cdot 3x \, dx + 0 + 0 = 3\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^2 = 8.$$

$$\boxed{\iint_\Sigma (\nabla\times F)\cdot\nu \, d\sigma = 8}$$

Se non uso il T. di Stokes, calcolo $\nabla\times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xz & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, x, 0)$,

quindi $\iint_\Sigma (\nabla\times F)\cdot \nu \, d\sigma = -\int_0^2 dx \int_0^3 dy \, (0,x,0)\cdot(-y,-x,1)$ $\quad$ (perché $\Sigma = \Sigma_5$ di (1.2))

$$= \int_0^2 x^2 dx \cdot \int_0^3 dy = \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^2 \cdot 3 = 8.$$

---

(2) $F_a = (P_a, Q_a)$; $F_a$ esatto $\Leftrightarrow F_a$ è chiuso perché $\mathbb{R}^2$ è convesso.

$$\partial_y P_a(x,y) = e^{x^2-y^2}\cdot\left\{-2y\cdot\left(y\cos(axy) + x\sin(axy)\right) + \cos(axy) - axy\sin(axy) + a x^2 \cos(axy)\right\}$$

$$\partial_x Q_a(x,y) = e^{x^2-y^2}\cdot\left\{2x\cdot\left(x\cos(axy) - y\sin(axy)\right) + \cos(axy) - axy\sin(axy) - a y^2\cos(axy)\right\}$$

Si vede che $F_a$ è esatto $\Leftrightarrow \boxed{a = 2.}$

Cerco un potenziale $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ t.c. $\partial_x \varphi = P_2$ e $\partial_y \varphi = Q_2$.

$$\varphi(x,y) = \int P_2(x,y)\,dx = \int e^{x^2-y^2}\cdot\left[y\cos(2xy) + x\cdot\sin(2xy)\right]dx$$

$$= \int e^{x^2-y^2}\, y\cdot\cos(2xy)\,dx + \underbrace{\frac{e^{x^2-y^2}}{2}\cdot\sin(2xy) - \int \frac{e^{x^2-y^2}}{2}\cdot\cos(2xy)\cdot 2y\,dx}_{\text{ho integrato per parti } \int e^{x^2-y^2}\cdot x\cdot\sin(2xy)\,dx}$$

$$= \frac{e^{x^2-y^2}}{2}\sin(2xy) + K(y)$$ con $K$ che dipende dalla sola $y$.

Calcolo $\partial_y \varphi(x,y) = e^{x^2-y^2}\left(-y\cdot\sin(2xy) + x\cdot\cos(2xy)\right) + K'(y) = Q_2(x,y) + K'(y)$.

Allora pongo $K = \text{cost.}$ e ho $\boxed{\varphi(x,y) = \frac{e^{x^2-y^2}}{2}\cdot\sin(2xy) + \text{cost.}}$

(3) Posto $u = 2x+3y$ e $v = 3x-2y$ con

$(x,y)\in A \iff (u,v) \in [0,1]\times[0,1]$ e $du\,dv = \left|\det J\binom{u,v}{x,y}\right| dx\,dy$

$$= \left|\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}\right| dx\,dy = 13\cdot dx\,dy,$$

ho che Integrale $= \frac{1}{13}\int_0^1 du \int_0^1 dv\,[\sin(\pi u) + \cos(\pi v)]$

$$= \frac{1}{13}\cdot\left[-\frac{\cos(\pi u)}{\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{13}\left[\frac{\sin(\pi v)}{\pi}\right]_0^1 = -\frac{1}{13\cdot\pi}\cdot(\cos(\pi)-\cos(0)) = \boxed{\frac{2}{13\cdot\pi}}$$

(4) Omog. $z''+4z'=0$ $\qquad 0=\lambda^2+4\lambda = \lambda(\lambda+4) \iff \lambda = 0, 4$

int. gen. omog.: $z(x) = c_1 + c_2\cdot e^{4x}$

Poiché le costanti sono soluz. dell'omogenea, ho risonanza.

Provo con $y = Ax$; $y' = A$; $y''=0$: $\quad 4A = 4 \iff A = 1$.

Integrale generale: $y(x) = c_1 + c_2\cdot e^{4x} + x$; $y\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(5) $\partial_x h(x,y) = \frac{d}{dx}\left[\int_0^{\alpha(y)} f(x,t)\,dt\right] = \int_0^{\alpha(y)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$

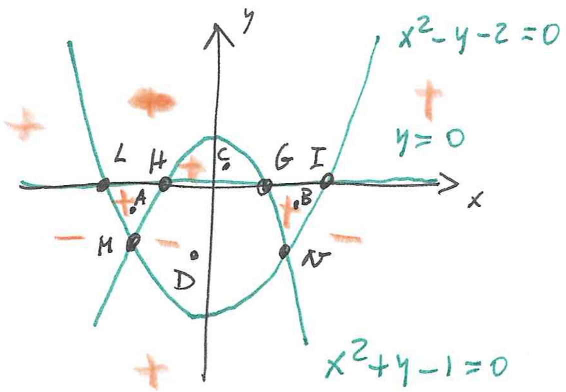
derivando sotto segno d'integrale.

$\partial_y h(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_0^{\alpha(y)} f(x,t)\,dt\right] = f(x,\alpha(y))\cdot \cancel{\frac{d}{dy}}\,\alpha'(y)$

utilizzando T.F.C.I. e derivata di composizione.

$$\Rightarrow \boxed{\nabla h(x_0,y_0) = \left(\int_0^{\alpha(y_0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt\,;\ f(x_0,\alpha(y_0))\,\alpha'(y_0)\right)}$$

(6) $f(x,y) - 3 = (x^2+y-1)\cdot(x^2-y-2)\cdot y = g(x,y)$




Se voglio fare in fretta, mi conviene pensare. Le curve in verde sono l'insieme di livello $L_0 = \{(x,y): g(x,y)=0\}$ e il segno di $g$ cambia attraversandole: l'ho indicato in rosso. Per il T. di Weierstrass devo avere punti di MAX. relativo nelle regioni limitate dove $g>0$ e punti di min. relativo se $g<0$. Dove due curve di $L_0$ s'incontrano ho dei punti critici che non sono di max. rel. né di min. rel.: sono punti di selle.

Devo quindi avere almeno i punti di:

selle G, H, I, L, M, N
MAX. rel. A, B, C
min. rel. D

→ almeno 10 pti critici con classificazione nota.

I punti di selle sono soluzioni di:

(L, I) $\begin{cases} x^2-y-2=0 \\ y=0 \end{cases}$ (H, G) $\begin{cases} x^2+y-1=0 \\ y=0 \end{cases}$ (M, N) $\begin{cases} x^2-y-2=0 \\ x^2+y-1=0 \end{cases}$

Faccio i miei calcoli.

$f_x(x,y) = 2x\cdot y\cdot(x^2-y-2) + 2x\cdot y\cdot(x^2+y-1)$
$= 2\cdot x\cdot y\cdot(2x^2-3)$

$f_y(x,y) = (x^2-y-2)y - (x^2+y-1)y + (x^2+y-1)(x^2-y-2) =$
$= (-2y-1)y + (x^2+y-1)\cdot(x^2-y-2)$

$$\nabla f(x,y)=0 \iff \underbrace{\begin{cases} x=0 \\ (-2y-1)y+(y-1)(-y-2)=0 \end{cases}}_{\alpha} \text{ o } \underbrace{\begin{cases} y=0 \\ (x^2-1)(x^2-2)=0 \end{cases}}_{\beta} \text{ o } \underbrace{\begin{cases} x^2=3/2 \\ (-2y-1)y+(y+\frac{1}{2})(-y-\frac{1}{2})=0 \end{cases}}_{\gamma}$$

$\alpha \begin{cases} x=0 \\ 3y^2+2y-2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{3} \end{cases}$ $\boxed{C=\left(0; \frac{-1+\sqrt{7}}{3}\right) \text{ MAX. rel.}}$ $\boxed{D=\left(0; \frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right) \text{ min. rel.}}$

$\beta \begin{cases} y=0 \\ x=\pm 1 \text{ o } x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$ $\boxed{L=(-\sqrt{2},0),\ H=(-1,0),\ G=(1,0),\ I=(\sqrt{2},0) \quad \text{p.ti di selle}}$

$\gamma \begin{cases} x^2=3/2 \\ 3y^2+2y+\frac{1}{4}=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm\sqrt{3/2} \\ y=\dfrac{-2\pm 1}{6} = -\frac{1}{6}, -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\boxed{A=\left(-\sqrt{3/2}, -\tfrac{1}{6}\right),\ B=\left(\sqrt{3/2}, -\tfrac{1}{6}\right): \text{MAX. rel.}}$
$\boxed{M=\left(-\sqrt{3/2}, -1/2\right);\ N=\left(\sqrt{3/2}, -1/2\right): \text{selle}}$

Se non ho voglia di pensare, calcolo la matrice Hessiana.

$f_{xx} = 2y\cdot(6x^2-3)$ $f_{xy} = 2x\cdot(2x^3-3)$

$f_{yx} = f_{xy}$ $f_{yy} = -4y-1+(x^2-y-2)-(x^2+y-1)$
$= -4y-1-2y-1$
$= -6y-2$

→ p.es.
$\text{Hess}\left(\pm\sqrt{3/2}, -\frac{1}{6}\right) = \begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
è def. neg. ⇒ MAX. rel.

$\text{Hess}\left(\pm\sqrt{3/2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$

# Prova scritta di Analisi Matematica LB (20/6/2012)

Nome.......................................Cognome............................................... Matricola................

(1) [3 pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$(z+2i)^2 - 12(z+2i) + 35 = 0$$

(2) [3 pt] Per quali valori di $\gamma > 0$ si ha la convergenza dell'integrale

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan(x^{\gamma})}{x^{2\gamma}+x^{3\gamma}} dx$$

**(3) [4 pti]** Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme $\Omega = \{(x,y,z) : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1, \ xy \le z \le xy+1\}$. e $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ continua.

Trovare $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ e, per $z \in I$, trovare $A(z) \subseteq \mathbb{R}^2$, tali che

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_I \left[ \iint_{A(z)} f(x,y,z)dxdy \right] dz$$

**(4) [5 pti]** Sia $A = \{(x,y) : \ 0 \le 2x+3y \le 1, \ 0 \le 3x-2y \le 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\iint_A (\sin[\pi(2x+3y)] + \cos[\pi(3x-2y)])\, dxdy.$$

**(5) [3 pti]** Trovare l'integrale generale di

$$y'' + a16y' = 4.$$

**(6) [4 pti]** Siano $\alpha$, $\beta$ in $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e si ponga

$$h(x, y) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(y)} f(t)dt.$$

Calcolare $\nabla h(x_0, y_0)$.

**(7) [8 pti]** Classificare i punti critici di $f(x, y) = (x^2 + y - 1)(x^2 - y - 5)y$.

AM1B - 20/6/2012 (gli esercizi mancanti sono nella correzione dello scritto di AM2).

(2) $f(x)=\dfrac{\arctg(x^\gamma)}{x^{2\gamma}+x^{3\gamma}} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^\gamma}{x^{2\gamma}+x^{3\gamma}} = \dfrac{1}{x^\gamma+x^{2\gamma}} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^\gamma}$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$ converge $\Leftrightarrow$ $0<\gamma<1$

$f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{\pi/2}{x^{2\gamma}+x^{3\gamma}} \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{x^{3\gamma}}$

$\Rightarrow \int_1^\infty f(x)\,dx$ converge $\Leftrightarrow$ $3\gamma>1$ $\Leftrightarrow$ $\gamma>1/3$

L'integrale converge $\Leftrightarrow$ $\boxed{\frac{1}{3}<\gamma<1}$

(3) $z\in I \Leftrightarrow \exists\, x\in[0,1]\ \exists\, y\in[0,1]:\ xy\le z\le xy+1$

Avendo per tali $x,y$ che $xy\ge 0$ (con $=$ se $x=0$ o $y=0$)

e che $xy+1\le 1\cdot 1+1=2$ (con $=$ se $x=y=1$)

abbiamo che $\alpha=0$, $\beta=2$ e per $z\in[\alpha,\beta]$,

$A(z)=\{(x,y):\ xy\le z\le xy+1\}$.

(6) $\partial_x h(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\displaystyle\int_{\beta(y)}^{\alpha(x)} f(t)\,dt\right) = -f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x)$ per T.F.C.I. e derivata di composizioni

$\partial_y h(x,y)= f(\beta(y))\cdot\beta'(y)$

$$\boxed{\nabla h(x_0,y_0)=\left(-f(\alpha(x_0))\cdot\alpha'(x_0),\ f(\beta(y_0))\cdot\beta'(y_0)\right)}$$