Prova scritta di Analisi Matematica I (20/7/2012)

Nome...**Cognome**... **Matricola**.................

(1) [8 pt] Studiare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^{\frac{1}{x-3} - \frac{1}{|x-1|}}.$$

- Determinare il dominio di f, gli intervalli su cui f è continua e i limiti di f agli estremi di questi intervalli.

- Trovare i punti in cui la funzione f è derivabile e calcolarne la derivata.

- Trovare gli intervalli su cui f è, rispettivamente, crescente o decrescente.

- Trovare punti di massimo e minimo relativo.

- Tracciare un grafico qualitativo di f.

(2) [4 pt] Calcolare il limite di funzione

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^4}{e^{\cos(3x)} - e^{1-\frac{9x^2}{2}}}.$$

(3) [4 pt.] Calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \tan(4x)dx.$$

(4) [3 pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$e^{2z} - 3e^z + 2 = 0$$

(5) [2 pt] Per quali valori di $\gamma > 0$ si ha la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-x^{\gamma}})^{\gamma}}{x^{2\gamma}}$$

(6) [4 pt. se esatto, -1 pt. se errato, 0 pt. se non fatto.] Sia $f : [\cancel{0} -1, 1] \to \mathbb{R}$ continua in $[-1, 1]$ e sia $f(-1) < 0 < f(1)$.

Quale delle seguenti affermazioni segue *necessariamente* dalle ipotesi?

- L'equazione $f(x) = x$ ha almeno una soluzione x in $[-1, 1]$.
- f è crescente in $[-1, 1]$.
- L'equazione $f(x)^2 + x^2 = 1$ ha almeno due soluzioni in $[-1, 1]$.
- Esiste x in $(-1, 1)$ tale che $f'(x) > 0$.

(7) [3 pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, e sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = f(\sin(7x))$$

Calcolare

$$h'(x).$$

(8) [2 pt] Calcolare il limite di successione

$$\lim_{n\to\infty} \left[en \log\left(1 + \frac{6}{n}\right) + \pi \frac{1}{n} \log(1 + n) \right]$$

AM I 20/7/2012.

① Dominio$(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ e $f \in C^1(\mathbb{R}\setminus\{-1,3\}; \mathbb{R})$.

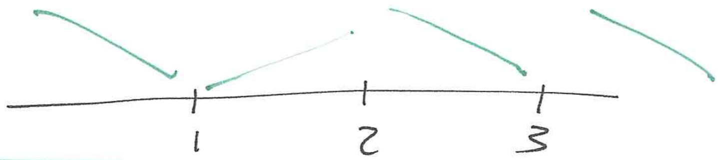
Calcolo prima $f'(x)$, poi i limiti.

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x-3} - \frac{1}{|x-1|}} \cdot \left[-\frac{1}{(x-3)^2} + \frac{\operatorname{sgn}(x-1)}{|x-1|^2} \right]$$

$$= e^{\frac{1}{x-3} - \frac{1}{|x-1|}} \cdot \frac{(-1)\cdot(x-1)^2 + \operatorname{sgn}(x-1)\cdot(x-3)^2}{(x-3)^2\cdot(x-1)^2}$$

$$f'(x) \geq 0 \iff \begin{cases} x>1 \text{ e } (x-3)^2-(x-1)^2 = -6x+9+2x-1 = -4x+8 \geq 0 \\ \text{oppure} \\ x<1 \text{ e } -(x-3)^2-(x-1)^2 \geq 0 \quad (\text{impossibile}). \end{cases}$$

$\iff (x>1 \text{ e } x \leq 2)$

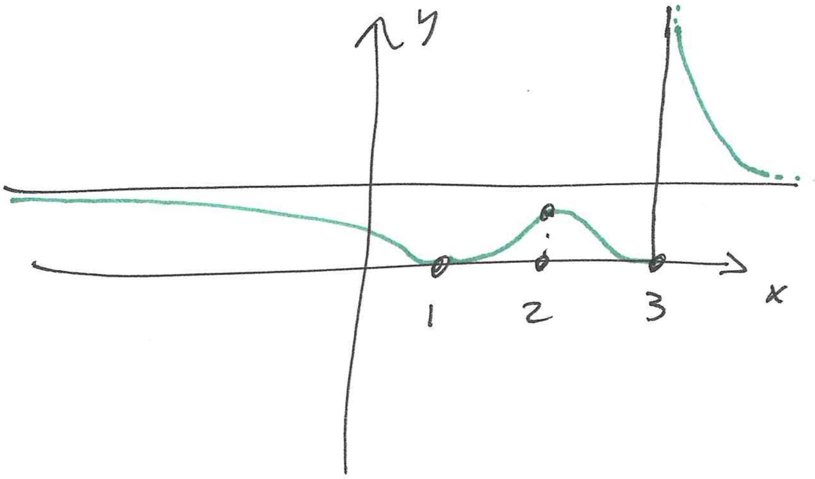


$\boxed{f \text{ cresce in } (1,2] \text{ e decresce in } (-\infty,1), [2,3) \text{ e } (3,+\infty)}$

$\boxed{x=2 \text{ è p.to di MAX. relativo.}}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e^0 = 1 \qquad \lim_{x\to 1^\pm} f(x) = e^{-\frac{1}{2}-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = e^{\infty - \frac{1}{2}} = +\infty \qquad \lim_{x\to 3^-} f(x) = e^{-\infty-\frac{1}{2}} = 0$$



(2) $\cos(3x) = 1 - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^4}{4!} + o(x^4) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{3^4 x^4}{24} + o(x^4)$

$$\Rightarrow e^{\cos(3x)} - e^{1-\frac{9}{2}x^2} = e^{1-\frac{9}{2}x^2 + \frac{3^3}{2^3}x^4 + o(x^4)} - e^{1-\frac{9}{2}x^2}$$

$$= e^{1-\frac{9}{2}x^2}\cdot\left[e^{\frac{3^3}{2^3}\cdot x^4 + o(x^4)} - 1\right] \underset{x\to 0}{\sim} e\cdot\frac{3^3}{2^3}\cdot x^4$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}(\cdots) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^4}{e\cdot 3^3/2^3\cdot x^4} = \boxed{\frac{8}{27e}}$$

(3) $\int_0^{\pi/16} \tan(4x)\,dx = \int_0^{\pi/16} \frac{\sin(4x)}{\cos(4x)}\,dx =$

$y = \cos(4x)$
$dy = -\sin(4x)\cdot 4\cdot dx$
$x\Big|_0^{\pi/16} \Leftrightarrow y\Big|_1^{\cos(\pi/4)=1/\sqrt{2}}$

$= -\frac{1}{4}\int_1^{1/\sqrt{2}} \frac{dy}{y} = \frac{1}{4}\Big[\log|y|\Big]_{y=1/\sqrt{2}}^{1}$

$= \frac{-1}{4}\log\frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\log\sqrt{2}}{4}}$

Primitiva di $\tan(4x)$:

$F(x) = \frac{\log|\cos(4x)|}{-4}$

(4) Sia $w=e^z$: $0 = w^2-3w+2 = (w-1)(w-2) \Leftrightarrow w=1,2$

$e^z = 1 = e^0\cdot e^{i\cdot 0} \Leftrightarrow \underline{z = 2k\pi i \quad (k\in\mathbb{Z})}$

$e^z = 2 = e^{\log 2}\cdot e^{i\cdot 0} \Leftrightarrow \underline{z = \log(2) + 2k\pi i \quad (k\in\mathbb{Z})}$

(5) $f(x) = \frac{(1-e^{-x^\gamma})^\gamma}{x^{2\gamma}} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{(x^\gamma)^\gamma}{x^{2\gamma}} = x^{\gamma^2-2\gamma}$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$ converge $\Leftrightarrow \gamma^2-2\gamma > -1 \Leftrightarrow (\gamma-1)^2>0$
$\Leftrightarrow \gamma\neq 1$

$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2\gamma}} \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ conv. $\Leftrightarrow 2\gamma>1 \Leftrightarrow \gamma>1/2$

Quindi $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ converge $\Leftrightarrow \boxed{\gamma>1/2 \text{ e } \gamma\neq 1.}$

(6)

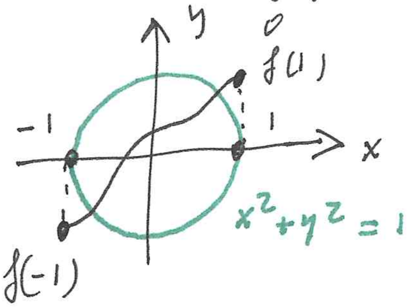
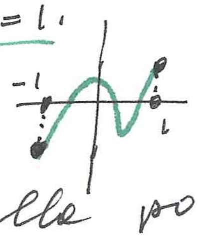


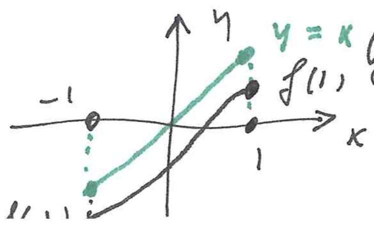
Fig. I

Dalle ipotesi e dal Teo. degli zeri segue che grafico(f) interseca $x^2+y^2=1$ in almeno due punti (vedi figura I) $\Rightarrow$ esistono almeno due punti x t.c. $x^2+f(x)^2=1$.

- f potrebbe non essere crescente:



- f potrebbe non essere derivabile: nulla posso dire su $f'(x)$

- 

graf(f) potrebbe non intersecare il grafico di $y=x$.

(7) $h'(x) = f'(\sin(7x)) \cdot \cos(7x) \cdot 7$

(8) Usando $\frac{\log(1+x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$ ho che $\frac{\log\left(1+\frac{6}{n}\right)}{6/n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$

$\Rightarrow \quad e \cdot n \cdot \log\left(\frac{6}{n}+1\right) = e \cdot \frac{\log(1+6/n)}{6/n} \cdot 6 \xrightarrow[n \to \infty]{} 6e$

e $\quad \frac{\log(1+n)}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ per confronto tra logaritmi e potenze

$\Rightarrow$ il limite è $\boxed{6e}$

Prova scritta di Analisi Matematica II (20/7/2012)

Nome...Cognome.. Matricola.................

(1) [**14 pti**] Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme $\Omega = \Big\{(x,y,z):\ 0 \le z \le (3-\sqrt{x^2+y^2})^2,\ x^2+y^2 \le 9\Big\}$.

(1.1) Fare un disegno *qualitativo* di Ω.

(1.2) Parametrizzare $\partial\Omega$ e dire se le parametrizzazioni scelte sono o meno compatibili con il campo ν normale a $\partial\Omega$ esternamente a Ω.

(1.3) Sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale. Scrivere *una* formula esplicita che dia il flusso $\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu d\sigma$ di F attraverso $\partial\Omega$. (Nella formula devono apparire, magari iterati, solo integrali di una variabile).

(1.4) Calcolare il flusso di cui al punto (1.3) quando $F(x,y,z) = (x,y,z)$.

(1.5) . Sia $\Sigma = \Big\{(x,y,z) \in \partial\Omega:\ 0 \le z = (3-\sqrt{x^2+y^2})^2 \le \frac{9}{4}\Big\}$. Parametrizzare $\partial\Sigma$ e dire se le parametrizzazioni scelte sono compatibili con la normale ν a Σ (ν essendo la normale di cui al punto (1.2)).

(1.6) Calcolare $\iint_\Sigma (\nabla \times F) \cdot \nu d\sigma$, con $F \in C^1(\Sigma, \mathbb{R}^3)$, $F(x,y,z) = (-zy, zx, 0)$.

(2) [3 pti] Dire per quale valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ il campo $F_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è esatto, dove

$$F_a(x,y) = \left(e^{xy}(1 + axy), e^{xy}x^2\right).$$

Calcolarne un potenziale.

(3) [4 pti] Sia $A = \left\{(x,y) : \ x^2 + y^2 \leq 16, \ y \geq 0, \ (x-2)^2 + y^2 \geq 4\right\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\iint_A y dx dy.$$

(4) [2 pti] Trovare l'integrale generale di

$$y'' + 49y = e^{7x}.$$

(5) [2 pti] Siano f in $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ e si ponga

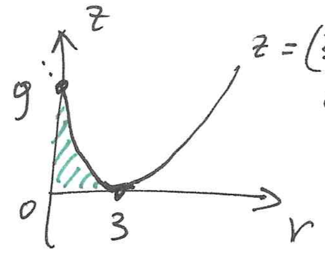
$$h(x, y, z) = f(2\alpha(x, y, z), 3\beta(x, y, z)).$$

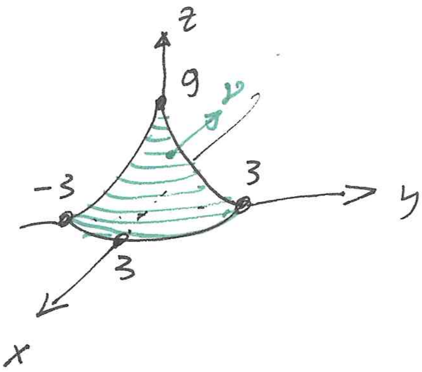
Calcolare $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$.

(6) [5 pti] Classificare i punti critici di $f(x, y) = y(x^3 - x - 2y) + 2$.

AM II − 20/7/2012

(1) (1.1) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ con $\begin{matrix} r \geq 0 \\ |\theta| \leq \pi \end{matrix}$ Ho che $(x,y,z) \in \Omega \iff \begin{cases} 0 \leq z \leq (3-r)^2 \\ 0 \leq r;\ r^2 \leq 9 \\ |\theta| \leq \pi \end{cases}$





(1.2) $\Sigma_1 = \{(x,y,z) : z = (\sqrt{x^2+y^2} - 3)^2;\ x^2+y^2 \leq 9\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^2 \supseteq A_1 = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 3;\ |\theta| \leq \pi\} \xrightarrow{\Phi_1} \mathbb{R}^3$; $\Phi_1(r,\theta) = (r\cos\theta; r\sin\theta; (3-r)^2)$

Ho che $\Phi_1(A_1) = \Sigma_1$ e $(\partial_r \Phi_1 \times \partial_\theta \Phi_1)(r,\theta) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & 2(r-3) \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$

$= (-2(r-3)r\cos\theta, -2(r-3)r\sin\theta, r)$, che punta verso l'alto: è compatibile con ν.

$\Sigma_2 = \{(x,y,0) : x^2+y^2 \leq 9\} \subseteq \mathbb{R}^3$; $\mathbb{R}^2 \supseteq A_2 = A_1 \xrightarrow{\Phi_2} \mathbb{R}^3$; $\Phi_2(r,\theta) = (r\cos\theta; r\sin\theta; 0)$

Ho che $\Phi_2(A_2) = \Sigma_2$ e $(\partial_r \Phi_2 \times \partial_\theta \Phi_2)(r,\theta) = (0,0,r)$ che punta in alto: non è compatibile con ν.

(1.3) Sia $F = (P,Q,R)$. Poiché $dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$ ho che

$\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\,dr \int_0^{(3-r)^2} dz \cdot \operatorname{div} F(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$

(se uso il Teo. delle divergenze e coordinate cilindriche $(x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$)

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 dr \Big[-2(r-3)r\cos\theta\, P(r\cos\theta, r\sin\theta, (3-r)^2) - 2(r-3)r\sin\theta\, Q(r\cos\theta, r\sin\theta, (3-r)^2)$

$+ r\,R(r\cos\theta, r\sin\theta, (3-r)^2)\Big] - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 dr\, r R(r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$

(se non uso il Teo. delle divergenze.

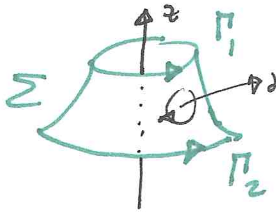
(1.4) Poiché $\operatorname{div} F = P_x + Q_y + R_z = 1+1+1 = 3$; per (1.3) ho che

$\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma = \iiint_\Omega 3 \cdot dx\,dy\,dz = 3 \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^3 r\,dr \cdot \int_0^{(3-r)^2} dz$

$= 3 \cdot 2\pi \cdot \int_0^3 r \cdot (r-3)^2 dr = 6\pi \left\{ \left[\frac{(r-3)^3}{3} \cdot r\right]_0^3 - \int_0^3 \frac{(r-3)^3}{3} dr \right\}$ integrando per parti

$= 6 \cdot \pi \cdot \left\{ -\frac{(r-3)^4}{3 \cdot 4} \right\}_0^3 = \frac{\pi}{2}(-0+3^4) = \frac{3^4}{2} \cdot \pi$

(1.5)



Uso (1.2) per parametrizzare Σ, osservando che $\Sigma \subseteq \Sigma_1$;

$\Sigma = \Phi_1(A_3)$ con $A_3 = \{(r,\vartheta): |\vartheta| \le 0;\ r \ge 0;\ (3-r)^2 \le 9/4\}$

$= \{(r,\vartheta): |\vartheta| \le 0;\ \frac{3}{2} \le r \le 3\}$.

$\Gamma_1(\vartheta) = \left(\frac{3}{2}\cos\vartheta; \frac{3}{2}\sin\vartheta; \frac{9}{4}\right)$; $\Gamma_1 : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^3$ non è compatibile con

$\Gamma_2(\vartheta) = (3\cos\vartheta; 3\sin\vartheta; 0)$; $\Gamma_2 : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^3$ è compatibile con

(1.6) Uso Stokes: $\iint_\Sigma (\nabla \times F)\cdot \nu \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F(\gamma)\cdot d\gamma = -\int_{\Gamma_1} F(\gamma)\cdot d\gamma + \int_{\Gamma_2} F(\gamma)\cdot d\gamma$

(osservo che $F = 0$ su Γ_2) $= -\int_{\Gamma_1} F(\gamma)\cdot d\gamma$

$= -\int_0^{2\pi} F(\Gamma_1(\vartheta))\cdot \Gamma_1'(\vartheta)\, d\vartheta = -\int_0^{2\pi} \left(-\frac{9}{4}\cdot\frac{3}{2}\sin\vartheta, \frac{9}{4}\cdot\frac{3}{2}\cos\vartheta, 0\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\sin\vartheta, \frac{3}{2}\cos\vartheta, 0\right) d\vartheta$

$= -\frac{9}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^2 \int_0^{2\pi} (\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta + 0)\, d\vartheta = -\frac{3^4}{2^4}\cdot\int_0^{2\pi} d\vartheta = -\frac{3^4}{2^3}\cdot\pi$

(2) Sia $F_a = (P, Q)$: $P_y(x,y) = x\cdot e^{xy}(1+axy) + e^{xy}\, ax = e^{xy}x\cdot(1+a+axy)$

$Q_x(x,y) = y\cdot e^{xy} x^2 + e^{xy}\, 2x = x\cdot(2+xy)\cdot e^{xy}$

$P_y = Q_x \iff a = 1$: $F_1 = F$ è esatto perché $\mathbb{R}^2$ è convesso.

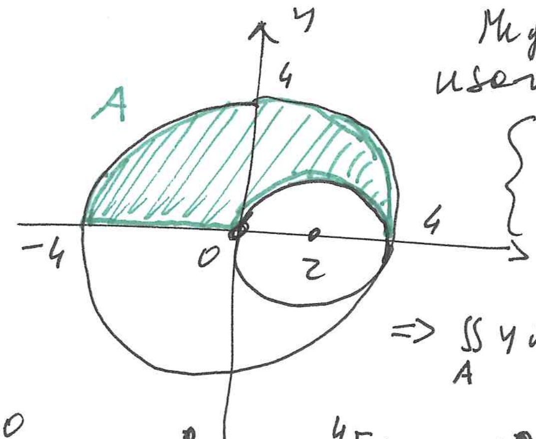
$\varphi(x,y) = \int P(x,y)\,dx = \int e^{xy}(1+xy)\,dx = \frac{e^{xy}}{y}\cdot(1+xy) - \int \frac{e^{xy}}{y}\cdot y\,dx$

$= \frac{e^{xy}}{y}(1+xy) - \frac{e^{xy}}{y} + c(y) = x e^{xy} + c(y)$

$Q(x,y) = \partial_y \varphi(x,y) = x^2 e^{xy} + c'(y) \iff c'(y) = 0$: c costante.

$$\boxed{\varphi(x,y) = x\cdot e^{xy} + \text{cost.}}$$

(3)



Meglio evitare le coordinate polari e usare il T. di riduzione: $(x,y)\in A \iff$

$$\begin{cases} 0 \le x \le 4 \text{ e } \sqrt{4-(x-2)^2} \le y \le \sqrt{16-x^2} \\ \text{oppure} \\ -4 \le x \le 0 \text{ e } 0 \le y \le \sqrt{16-x^2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \iint_A y\,dx\,dy = \int_{-4}^0 dx \int_0^{\sqrt{16-x^2}} y\,dy + \int_0^4 dx \int_{\sqrt{4-(x-2)^2}}^{\sqrt{16-x^2}} y\,dy$

$= \int_{-4}^0 \frac{(16-x^2)}{2}dx + \int_0^4 \left[\frac{(16-x^2)}{2} - \frac{4-(x-2)^2}{2}\right] dx = \int_{-4}^4 \frac{(16-x^2)}{2}dx - \int_0^4 \frac{4-(x-2)^2}{2}dx$

$= 16\times 8 - \frac{1}{\cdot}(x^3)^4 - 4\times 4 + \frac{1}{\cdot}((x-2)^3)^4 = 64 - 64 - 8 + 8 = \frac{2}{\cdot}\cdot 56 = 112$

(4) $y''+49\cdot y = e^{7x}$ $\qquad z''+49\cdot z=0 \qquad \lambda^2+49=0 \qquad \lambda=\pm 7i$

$z(x)=A\cdot\cos(7x)+B\cdot\sin(7x)$ int. gen. eq. omog.

Provo con $y(x)=c\cdot e^{7x} \Rightarrow y''+49\cdot y=(c\cdot 49+49\cdot c)e^{7x}=98\cdot c\cdot e^{7x}$

$$\boxed{\begin{array}{l} y(x)=A\cdot\cos(7x)+B\cdot\sin(7x)+\frac{1}{98}e^{7x} \\ y\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \end{array}}$$: int. gen. eq. diff.

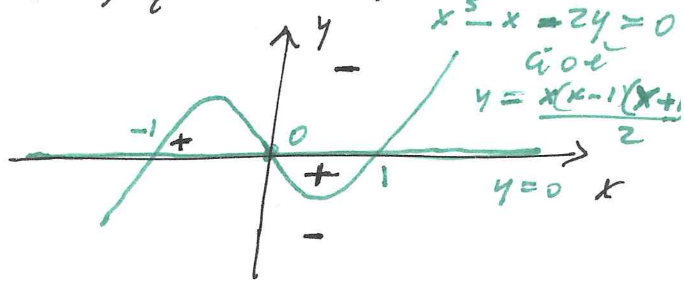
(5) Sia $f=f(u,v)$. $\nabla h=(h_x,h_y,h_z)$ con

$$h_x(x_0,y_0,z_0)=f_u(2\alpha(x_0,y_0,z_0),3\beta(x_0,y_0,z_0))\cdot 2\cdot\alpha_x(x_0,y_0,z_0)$$
$$+f_v(2\alpha(x_0,y_0,z_0),3\beta(x_0,y_0,z_0))\cdot 3\cdot\beta_x(x_0,y_0,z_0)$$

$$h_y(x_0,y_0,z_0)=f_u(2\alpha(x_0,y_0,z_0),3\beta(x_0,y_0,z_0))\cdot 2\cdot\alpha_y(x_0,y_0,z_0)$$
$$+f_v(2\alpha(x_0,y_0,z_0),3\beta(x_0,y_0,z_0))\cdot 3\cdot\beta_y(x_0,y_0,z_0)$$

$$h_z(x_0,y_0,z_0)=f_u(2\alpha(x_0,y_0,z_0),3\beta(x_0,y_0,z_0))\cdot 2\,\alpha_z(x_0,y_0,z_0)$$
$$+f_v(2\alpha(x_0,y_0,z_0),3\beta(x_0,y_0,z_0))\cdot 3\,\beta_z(x_0,y_0,z_0)$$

(6) $f(x,y)-z = y\cdot(x^3-x-2y)$



Mi aspetto p.ti di sella in $(-1,0)$; $(0,0)$; $(1,0)$

e p.ti di MAX. rel. in  e in .

$f_x(x,y)=(3x^2-1)y=0 \iff y=0$ o $x=\pm 1/\sqrt{3}$

$f_y(x,y)=x^3-x-2y-2y=x^3-x-4y$

$\nabla f(x,y)=0 \iff \begin{cases} y=0 \\ x^3-x=x(x-1)(x+1)=0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x=\pm 1/\sqrt{3} \\ y=\pm\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3-\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \end{cases}$

$=\pm\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}-1\right)=\mp\frac{1}{6\sqrt{3}}$

P.ti critici $\underbrace{(0,0),\ (1,0),\ (-1,0)}_{\text{devono essere selle}}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{6\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)$ } devono essere p.ti MAX. rel.

$\text{Hess} f(x,y)=\begin{pmatrix} 6xy & 3x^2-1 \\ 3x^2-1 & -4 \end{pmatrix}$ $\qquad \text{Hess} f(x,0)=\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & -4 \end{pmatrix}$ non def.

$\Rightarrow$ $\boxed{(0,0),(1,0),(-1,0) \text{ p.ti sella}}$

$\text{Hess} f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\mp\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)=\begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$: def. neg. $\Rightarrow$ $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)$