Prova scritta complessiva di Analisi Matematica II
Ingegneria Edile-Architettura, 9 settembre 11

Nome......................**Cognome**..................................**Matricola**..........................

(1) [14 pti] Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme $\Omega = \{(x,y,z) : \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} \leq 1, \ -1 \leq y \leq 0\} \cup \{(x,y,z) : \frac{x^2}{9} + y^2 + \frac{z^2}{4} \leq 1, \ y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$

(1.1) Fare un disegno *qualitativo* di Ω (usando coordinate cilindriche viene forse meglio).

(1.2) Parametrizzare $\partial\Omega$ e dire se la parametrizzazioni scelte sono o meno compatibili con il campo ν normale a $\partial\Omega$ esternamente a Ω.

(1.3) Sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale. Scrivere *una* formula esplicita che dia il flusso $\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu d\sigma$ di F attraverso $\partial\Omega$.

(1.4) Calcolare il flusso di cui al punto (1.4) quando $F = (3x^2y, 2y^2, 0)$.

(1.5) . Sia $\Omega = \{(x,y,z) : \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1, \ -1 \leq y \leq 0\}$. Parametrizzare $\partial\Sigma$ e dire se le parametrizzazioni scelte sono compatibili con la scelta μ della normale a Σ per cui $\mu = -\nu$ (ν essendo la normale di cui al punto (1.2)).

(2) [3 pt.] Trovare l'integrale generale reale di

$$(y' - 3y)' = 3\cos(3x)$$

(3) Classificare i punti critici di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

[5 pti].

$$f(x, y) = xy(3x + 2y - 1).$$

(4) [4 punti] Calcolare l'integrale

$$\iint_A \left(e^{3x+2y} + 1\right) dxdy,$$

dove

$$A = \{(x, y) :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 3x + 2y \leq 1\}.$$

(5) [3 punti] Siano $f, \alpha, \beta \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e si definisca

$$h(x) = f(\alpha(\cos(x), \sin(x)), \beta(1, x^3 + 2)).$$

Calcolare $h'(x)$ e $h'(0)$.

(6) [3 punti] Sia $F(x, y) = (ax^2 e^{x^3} \sin(y), e^{x^3} \cos(y))$. Trovare a in $\mathbb{R}$ in modo che F sia un campo esatto e calcolarne un potenziale.

Prova scritta complessiva di Analisi Matematica LB
9 settembre 11

Nome.....................**Cognome**................................**Matricola**.........................

(1) [**5 pt.**] Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme $\Omega = \{(x,y,z) : \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} \leq 1,\ -1 \leq y \leq 0\} \cup \{(x,y,z) : \frac{x^2}{9} + y^2 + \frac{z^2}{4} \leq 1,\ y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua. Trovare $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e, per ogni (x,z) in A, trovare $\alpha(x,z)$ e $beta(x,z)$ tali per cui

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_A \left(\int_{\alpha(x,z)}^{\beta(x,z)} f(x,y,z)dy \right) dxdz$$

(2) [4 pt.] Trovare l'integrale generale reale di

$$(y' - 3y)' = 3\cos(3x)$$

(3) [8 pt.] Classificare i punti critici di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = xy(3x + 2y - 1).$$

(4) [4 pt.] Calcolare l'integrale

$$\iint_A \left(e^{3x+2y}+1\right)\,dxdy,$$

dove

$$A = \{(x,y):\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 3x+2y \leq 1\}.$$

(5) [3 pt.] Siano $f, \alpha, \beta \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e si definisca

$$h(x) = f(\alpha(\cos(x), \sin(x)), \beta(1, x^3+2)).$$

Calcolare $h'(x)$ e $h'(0)$.

(6) [3 pt.] Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ di

$$z^2 - 5iz - 6 = 0.$$

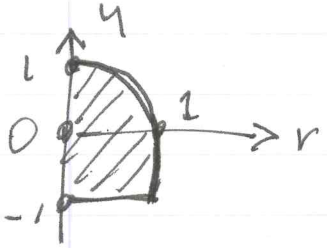
(7) [3 pt.] Trovare $\gamma \geq 0$ di modo che converga in senso generalizzato l'integrale

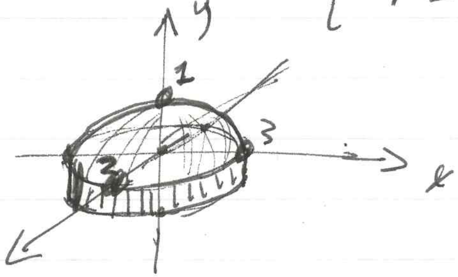
$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^{\gamma}+x^{5\gamma})^5}$$

9/9/2011 AM II.

(1) Pongo $x/3 = r\cos\theta$; $z/2 = r\sin\theta$; $r \ge 0$, $|\theta| \le \pi$

$(x,y,z) \in \Omega \iff \begin{cases} r \le 1 \\ -1 \le y \le 0 \end{cases}$ o se $\begin{cases} r^2+y^2 \le 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$





(2) $\Phi_1(x,z) = (x,-1,z)$; $\Phi_1 : A_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$A_1 = \{(x,z) : \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} \le 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$\Phi_2(\theta,y) = (3\cos\theta, y, 2\sin\theta)$; $\Phi_2 : A_2 \to \mathbb{R}^3$

$A_2 = \{(\theta,y) : |\theta| \le \pi;\ -1 \le y \le 0\}$

$\Phi_3(r,\theta) = (3r\cos\theta, \sqrt{1-r^2}, 2r\sin\theta)$, $\Phi_3 : A_3 \to \mathbb{R}^3$

$A_3 = \{(r,\theta) : |\theta| \le \pi,\ 0 \le r \le 1\}$.

Φ_1 parametrizza $\Sigma_1 = \{(x,y,z) : y=-1;\ \frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4} \le 1\}$

Φ_2 " $\Sigma_2 = \{(x,y,z) : \frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4} = 1;\ -1 \le y \le 0\}$

Φ_3 " $\Sigma_3 = \{(x,y,z) : \frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}+y^2 = 1;\ y \ge 0\}$.

$\partial_x \Phi_1 \times \partial_z \Phi_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\underline{j} = (0,-1,0)$

Φ_1 è compatibile con ν

$\partial_\theta \Phi_2 \times \partial_y \Phi_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3\sin\theta & 0 & 2\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2\cos\theta, 0, -3\sin\theta)$

$\partial_\theta \Phi_2 \times \partial_y \Phi_2(0,y) = (-2,0,0)$; $\Phi_2(0,y) = (3,0,0)$

Φ_2 non è comp. con ν

$\partial_r \Phi_3 \times \partial_\theta \Phi_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3\cos\theta & \frac{-2r}{2\sqrt{1-r^2}} & 2\sin\theta \\ -3r\sin\theta & 0 & 2r\cos\theta \end{vmatrix} =$

$= \left(-\frac{2r^2\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}}; -6r; -\frac{3r^2\sin\theta}{\sqrt{1-r^2}}\right)$: Φ_3 non è comp. con ν.

(1.3) $\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma = \iint_{A_1} F(x,-1,z) \cdot (0,-1,0)\, dx\, dz$

$- \iint_{A_2} F(3\cos\theta, y, 2\sin\theta) \cdot (-2\cos\theta, 0, -3\sin\theta)\, dy\, d\theta$

$- \iint_{A_3} F(3r\cos\theta; \sqrt{1-r^2}; 2r\sin\theta) \cdot \left(\frac{-2r^2\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}}; -6r; \frac{-3r^2\sin\theta}{\sqrt{1-r^2}}\right) \cdot dr\, d\theta$

(1.4) Uso T. div. $\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div} F \cdot dx\, dy\, dz$

$= \iiint_\Omega (6xy + 4y)\, dx\, dy\, dz =$ Pongo $\begin{cases} x/3 = r\cos\theta \\ z/2 = r\sin\theta \end{cases}$ $\boxed{dx\, dz = 6r\, dr\, d\theta}$

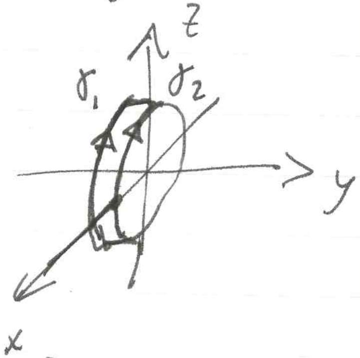
$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 6r\, dr \int_{-1}^{\sqrt{1-r^2}} dy \cdot (18r\cos\theta y + 4y)$

$= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 6r\, dr \cdot \int_{-1}^{\sqrt{1-r^2}} dy\, 4y = 2\pi \cdot 24 \cdot \int_0^1 r \cdot \frac{(1-r^2)-1}{2}\, dr$

$= -24\pi \cdot \left(\frac{r^4}{4}\right)_0^1 = -6\pi$: flusso $= -6\pi$

(10 5) $\gamma_1 : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^3$; $\gamma_1(\theta) = (3\cos\theta; -1; 2\sin\theta)$

$\dot{\gamma}_1(\theta) = (-3\sin\theta; 0, 2\cdot\cos\theta)$



γ_1 non è comp. con ν; lo è con μ

$\gamma_2(\theta) = (+3\cos\theta; 0; 2\sin\theta)$; $\gamma_2 : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^3$

è comp. con μ; non lo è con μ.

(2) $y'' - 3y' = 3\cos(3x)$ $z'' - 3z' = 0$ $\lambda^2 - 3\lambda = 0$

$\lambda = 0, 3$

cerco una sol. part. $z(x) = A + Be^{3x}$

$y(x) = C\cdot\cos(3x) + D\cdot\sin(3x)$

$y''(x) = -3C\cdot\sin(3x) + 3D\cdot\cos(3x)$

$3\cos(3x) = y'' - 3y' = \cos(3x)[3D - 3C] + \sin(3x)[-3C-3D]$

$\begin{cases} -3C - 3D = 0 \\ 3D - 3C = 3 \end{cases}$ $C = -D$ $6D = 3$ $y(x) = -\frac{1}{2}\cos(3x) + \frac{1}{2}\sin(3x)$

$y(x) = -\frac{1}{6}\sin(3x) - \frac{1}{6}\cos(3x)$

Int. gen.: $y(x) = A + B\cdot e^{3x} - \frac{1}{6}[\cos(3x) + \sin(3x)]$

(3) $f_x = y[(3x + 2y - 1) + x\cdot 3] = y\cdot(6x + 2y - 1)$

$f_y = x\cdot[(3x + 2y - 1) + y\cdot 2] = x\cdot(3x + 4y - 1)$

$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1/2 \end{cases}$ o $\begin{cases} x = 1/3 \\ y = 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} 6x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$

$\iff (x, y) = (0,0); (0, 1/2); (1/3, 0); (1/9, 1/6)$

$f_{xx} = 6y$ $f_{xy} = 6x + 2y - 1 + 2y$

$f_{yy} = 4x$

$\text{Hess} f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ sella

$\text{Hess} f(0, 1/2) = \begin{bmatrix} \cancel{4} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ sella

$\text{Hess} f(1/3, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \cancel{4} \end{bmatrix}$ sella

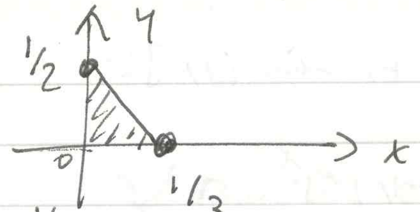
$\text{Hess} f\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{6}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 6/9 + 4/6 - 1 \\ 0 & 4/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 1/3 & 4/9 \end{bmatrix}$

Matrice def. pos.: p.to min rel.

$(0,0)$; $(0, 1/2)$; $(1/3, 0)$ selle

$(1/9; 1/6)$ p.to min. rel.

(4)



Integrale

$= \iint_A e^{3x} \cdot e^{2y} \, dx \, dy + \iint_A dx \, dy$

$= \int_0^{1/3} e^{3x} dx \int_0^{(1-3x)/2} e^{2y} dy + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$

$= \int_0^{1/3} e^{3x} \cdot \frac{1}{2} \left(e^{2y}\right)_0^{\frac{1-3x}{2}} dx + \frac{1}{12}$

$= \frac{1}{2} \int_0^{1/3} e^{3x} \cdot \left(e^{1-3x} - 1\right) dx + \frac{1}{12}$

$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{1/3} \left(e - e^{3x}\right) dx + \frac{1}{12} =$

$= \frac{1}{6} e - \left(\frac{e^{3x}}{6}\right)_0^{1/3} + \frac{1}{12} = \frac{e}{6} - \frac{e}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$

$= \frac{3}{12} = 1/4 .$

(5) Siano $f = f(u, v)$, $\alpha = \alpha(u, v)$, $\beta = \beta(u, v)$.

$h'(x) = f_u(\alpha(\cos x, \sin x), \beta(1, x^3+2)) \cdot [\cancel{\alpha_v(\cos x, \sin x), \cos}$

$\cdot [-\alpha_u(\cos x, \sin x) \cdot \sin x + \alpha_v(\cos x, \sin x) \cdot \cos x]$

$+ f_v(\alpha(\cos x, \sin x), \beta(1, x^3+2)) \cdot \beta_v(1, x^3+2) \cdot 3x^2$

$\Rightarrow h'(0) = f_u(\alpha(1,0), \beta(1,2)) \cdot \alpha_v(1,0)$

(6) $F = (P, Q)$

$P_y(x,y) = a x^2 e^{x^3} \cos(y)$

$Q_x(x,y) = 3 x^2 e^{x^3} \cos(y)$

$P_y = Q_x \Leftrightarrow a = 3$

F è chiuso (quindi esatto) $\Leftrightarrow a = 3$

$\varphi(x,y) = \int P(x,y) \, dx = \int 3x^2 e^{x^3} \sin(y) \, dx$

$= e^{x^3} \sin(y) + k(y)$,

e $\varphi_y(x,y) = e^{x^3} \cdot \cos(y) + k'(y) = Q(x,y)$

$\Leftrightarrow k' = 0$ (prendo $k = \text{cost} = 0$).

Potenziale $\varphi(x,y) = e^{x^3} \cdot \sin(y)$.

$\boxed{\text{Solo L-B}}$

(8) $z^2 - 5iz - 6 = 0$

$\Delta = (-5i)^2 - 4 \cdot (-6) = -1 = i^2$

$z = \frac{5i \pm i}{2} = 3i, 2i$

(7) $f(x) = \frac{1}{(x^\gamma + x^{5\gamma})^5} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{x^{5\gamma}}$ conv. se $5\gamma < 1$

$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{25\gamma}}$ conv. se $25\gamma > 1$

Conv. $\Leftrightarrow \frac{1}{25} < \gamma < \frac{1}{5}$