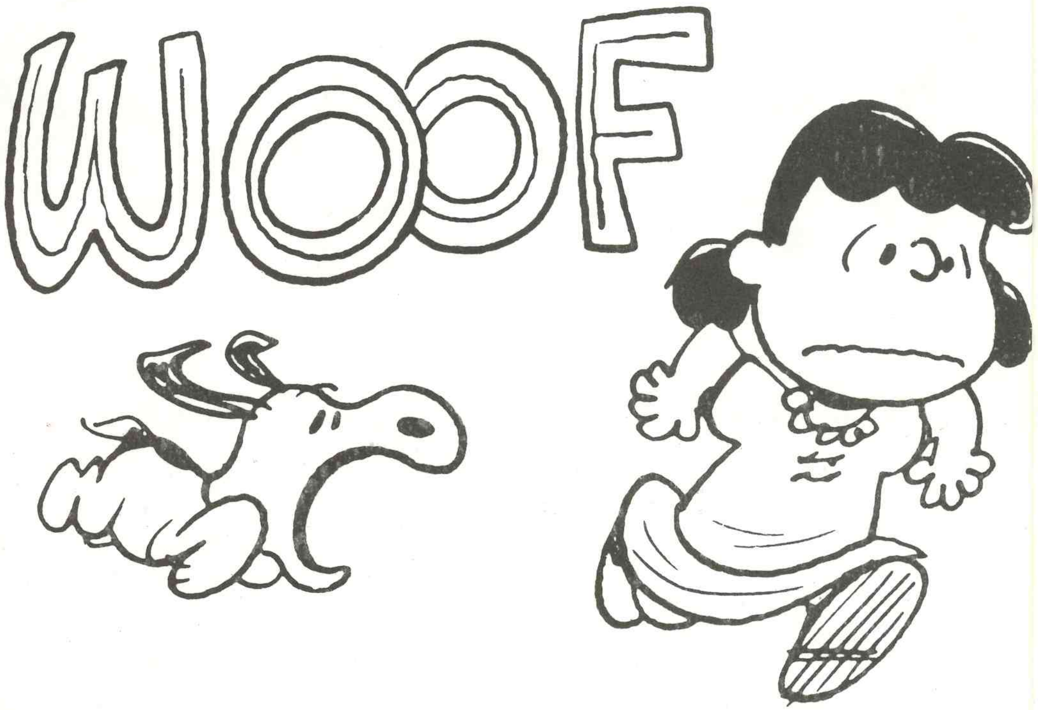


ANALISI MATEMATICA 2

Nicola Arcozzi

2010 - 2011

C.d.L. Ingegneria
Edile - Architettura

arcozzi@dm.unibo.it

~~www.unibo.~~
www.dm.unibo.it/~arcozzi

MILANO LIBRI EDIZIONI AUGURI DI MONDADORI

__Prologo.__ La gran parte di questo corso riguarda ~~[illegible]~~ il __calcolo differenziale e integrale__ __in più variabili__.

Motivazioni:

- geometriche (l'universo è 3D)
- fisiche (ogni parametro fisico è una variabile: esistono sistemi che coinvolgono infinite [!] variabili)
- matematiche 1 (alcuni aspetti del calcolo in una variabile si comprendono meglio in più variabili).
- matematiche 2 (il calcolo in più variabili ha un valore in sé).

Alcune domande:

- cos'è una curva in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$?
- cos'è la lunghezza di una curva?
- cos'è una superficie?
- cos'è il volume di un solido?

(Ma il calcolo in più variabili va molto al di là di queste domande!)

$\boxed{\text{Cosa sono i "gradi di libertà"?}}$

Dal punto di vista tecnico (__imprecisamente__):

calcolo in più variabili = calcolo in una variabile + algebra lineare

2

Breve richiamo di esempi dell'algebra lineare.

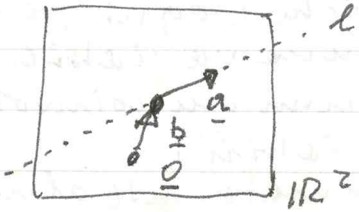
- $\mathbb{R} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{R}^2$

$t \longmapsto (a_1 t + b_1,\ a_2 t + b_2) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

con $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

è l'equazione parametrica di una retta l:

λ è una funzione



$\mathbb{R}^2 \supseteq l = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = a_1 t + b_1,\ y = a_2 t + b_2\ \exists t \in \mathbb{R}\}$

$l = \lambda(\mathbb{R}) \in \mathbb{R}^2$ è la retta

$l \in \mathbb{R}^2$ è un insieme

λ è il prototipo di una traiettoria (pensate t come tempo: $\lambda(t)$ è la posizione in $\mathbb{R}^2$ al tempo t), o curva in $\mathbb{R}^2$.

l è la traccia di λ. (Notare il linguaggio del linguaggio comune).

OSS. Se $\underline{a} = 0$, $l = \{\underline{b}\}$ è un punto!

Rango $\underline{a} = 1$: retta

Rango $\underline{a} = 0$: punto

3

- $\mathbb{R} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{R}^n$

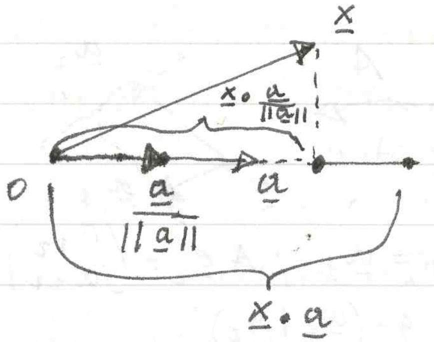
$\lambda(t) = \underline{a}\, t + \underline{b}$ $\quad (\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n;\ \underline{a} \neq \underline{0})$

è l'equazione parametrica di una retta in $\mathbb{R}^n$.

- Sia $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, ~~[illegible]~~ $\underline{a} \neq \underline{0}$.

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{L} \mathbb{R}$

$\underline{x} = (x_1, x_2) \longmapsto L\,\underline{x} = \underline{a} \circ \underline{x} = a_1 x_1 + a_2 x_2$



Interpretazione in termini di proiezioni

L è il prototipo delle funzioni reali di due variabili reali.

OSS. Se $\underline{a} = \underline{0}$, $L\,\underline{x} = 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^2$

Se $\underline{a} \neq \underline{0}$, L è suriettiva.

OSS. Se $\underline{a} \neq \underline{0}$, $\dim(\operatorname{Ker} L) = 1$:

il nucleo di L è una retta,

$\operatorname{Ker} L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0\}$

L'equazione $L\,\underline{x} = \underline{0}$ è l'equazione (non parametrica) di una retta.

- $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{a} \neq \underline{0}$, $\mathbb{R}^n \xrightarrow{L} \mathbb{R}$

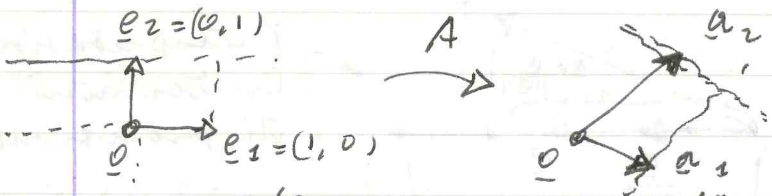
$L\,\underline{x} = \underline{a} \circ \underline{x}$

$A \in \mathcal{M}(2\times 2)$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Rango $A = 2$ (cioè, $\det A \neq 0$).

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{L} \mathbb{R}^2 \qquad L\underline{x} = A\cdot\underline{x}$

Possiamo pensare ad A come a una trasformazione di $\mathbb{R}^2$ (stessa base)



$A\,\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \underline{a}_1$; $A\,\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \underline{a}_2$

$A = (\underline{a}_1 \,|\, \underline{a}_2)$

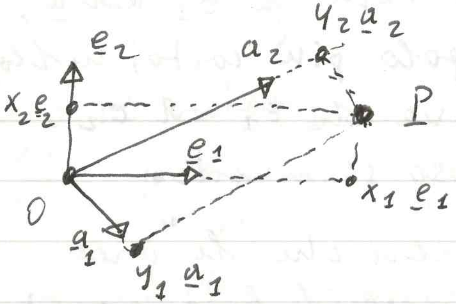
Possiamo, al contrario, pensare ad A come a un cambiamento di base ($\mathbb{R}^2$ sta fermo).

Se (x_1, x_2) sono le coordinate di P nella base e_1, e_2 e (y_1, y_2) sono quelle nella base $\underline{a}_1, \underline{a}_2$:

$$x_1\,\underline{e}_1 + x_2\,\underline{e}_2 = P = y_1\,\underline{a}_1 + y_2\,\underline{a}_2$$

cioè

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \begin{pmatrix} y_1 a_{11} + y_2 a_{12} \\ y_1 a_{21} + y_2 a_{22} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{A\cdot\underline{y}}$$



Il conto è più facile del disegno!

Nota: la stessa matrice A agisce:

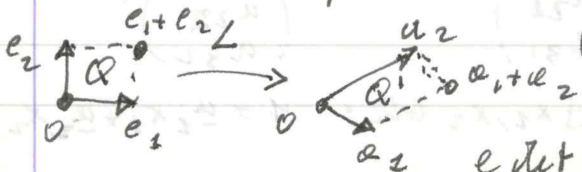
- nella trasformazione, mandando la base $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ nella base $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ (ordinatamente).
- nel cambiamento di base, mandando le coordinate di P rispetto a $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ in quelle rispetto a $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ (ordinatamente).

(Principio di "relatività": muovere i punti ha come contropartita cambiare la base nel senso inverso).

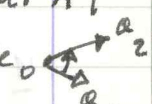
Osservazioni:

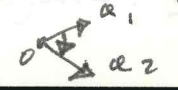
(1) Se Rango $A = 1$, allora $\dim(\operatorname{Im} L) = 2-1 = 1$: $\operatorname{Im}(L)$ è una retta (si ha un "collasso" della trasformazione).
Se Rango $A = 0$, $A = 0$ e $\operatorname{Im} L = \{\underline{0}\}$ è un punto (collasso totale).

(2) La quantità $\det A$ contiene molte informazioni (suppongo $\det A \neq 0$).



(2.1) Area$(Q') = |\det A|$

(2.2) $\det A > 0$ se 

e $\det A < 0$ se 

cioè, $\det A > 0 \iff$ vado da $\underline{a}_1$ ad $\underline{a}_2$ (seguendo l'angolo più corto) nello stesso verso che va da e_1 ad e_2. $\det A < 0 \iff$ il verso s'inverte.

(Ciò fa immaginare che le "aree con segno" avranno il loro peso)

∘∘∘ $A \in \mathcal{M}_{(n \times n)}$, $\det A \neq 0$.

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{R}^n \qquad \Lambda \underline{x} = A \underline{x}.$$

∘∘∘∘ $A \in \mathcal{M}(3 \times 2)$ $\qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

Rango $A = 2$.

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \underline{y} = \mathcal{L} \underline{x} = A \circ \underline{x}$$

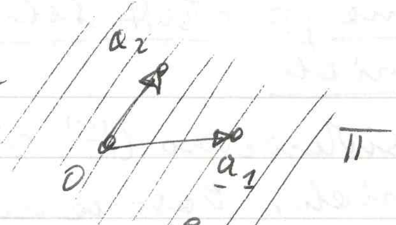
$$\begin{cases} y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \\ y_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 \end{cases}$$

$\mathcal{L}$ è una parametrizzazione di un piano Π in $\mathbb{R}^3$.

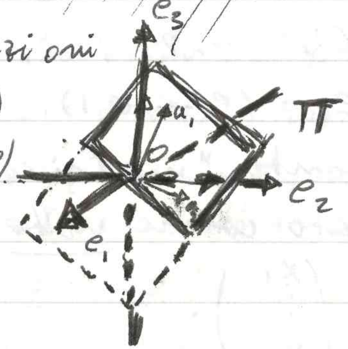
Siano $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$ e $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$.

$\underline{y} \in \mathrm{Im}(\mathcal{L}) \iff \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \underline{y} = \underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2$

$\mathcal{L}$ è il prototipo delle equazioni delle superfici.



Si hanno degenerazioni se Rango $A = 1$ (retta) o Rango $A = 0$ (punto).



∘∘∘∘ Sia $A \in \mathcal{M}(m \times n)$. Definiamo

$$\mathbb{L} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m ; \qquad \mathbb{L} \underline{x} = A \circ \underline{x} = \underline{y}.$$

Tutte le combinazioni $n \geq 1$, $m \geq 1$ hanno una qualche utilità.
I casi più significativi (e più facili da studiare) si hanno quando A ha rango massimo:

$$\text{Rango}(A) = \min(n, m).$$