Norma, prodotto scalare, prodotto vettoriale.

Consideriamo $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ come spazio vettoriale. Base canonica:

$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$; $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$; $\dots$; $e_n = (0, \dots, 0, 1)$.

Nei conti "matriciali", $x \in \mathbb{R}^n$ è pensato come vettore colonna:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Non uso simboli speciali per i vettori: ~~Ri~~chiarirò sempre se $x \in \mathbb{R}^n$ è un vettore, o $x \in \mathbb{R}$ è uno scalare, o (nel caso) $x \in M(m \times n)$ è una matrice.

Def. Il prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ è un'operazione

$$\circ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto x \circ y = \langle x, y \rangle$$

per cui valgono le proprietà

(PS1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad x \circ y = y \circ x$

(PS2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: (\alpha x + \beta y) \circ z = \alpha (x \circ z) + \beta (y \circ z)$

In particolare: $(\alpha x) \circ y = \alpha (x \circ y)$ e $(x + y) \circ z = x \circ z + y \circ z$

(PS3) $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad x \circ x \geq 0$ e $x \circ x = 0 \iff x = 0$.

In concreto, useremo solo il prodotto scalare canonico: $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

$\Longrightarrow x \circ y \overset{\text{def.}}{=} x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$.

ESERCIZIO: verificare (PS1-3) per questo prodotto.

Def. La norma (euclidea) associata a $\circ$ è la funzione

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty)$$
$$x \longmapsto (x \circ x)^{1/2} = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

per il prodotto scalare canonico.

Proprietà. (1) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}^n: \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

(2) $\|x\| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ e $(\|x\| = 0 \iff x = 0)$

(3) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n: |x \circ y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (Disuguaglianza di Cauchy - Schwarz)

(4) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n: \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (disuguaglianza triangolare)

(3') $\forall x, y \in \mathbb{R}^n: -\|x\| \cdot \|y\| \leq x \circ y \leq \|x\| \cdot \|y\|$

(4') $\forall x, y \in \mathbb{R}^n: \big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$

<u>Dim.</u> (1) $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|\lambda x\| =$

$= \|(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)\| = \sqrt{\lambda^2 x_1^2 + \dots + \lambda^2 x_n^2}$

$= \sqrt{\lambda^2 \cdot (x_1^2 + \dots + x_n^2)} = |\lambda| \cdot \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

$= |\lambda| \cdot \|x\|$.

(2) ovvio

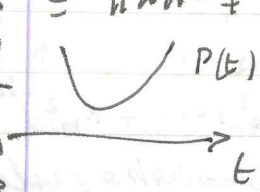
(3) Per $t \in \mathbb{R}$, sia $P(t) = \|x + ty\|^2$.

Allora, $\forall t \in \mathbb{R}$ e per (2),

$0 \le P(t) = (x+ty)\circ(x+ty) =$

$= x\circ x + t\, x\circ y + t\, y\circ x + t^2\, y\circ y$

$= \|x\|^2 + 2 \cdot x\circ y \cdot t + \|y\|^2 \cdot t^2$.



Ma P è un trinomio di II grado(*), quindi deve essere

$0 \ge \frac{\Delta}{4} = (x\circ y)^2 - \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$,

che è la tesi.

(4) Usando (3) nella disuguaglianza:

$\|x+y\|^2 = (x+y)\circ(x+y) = \|x\|^2 + 2\, x\circ y + \|y\|^2$

$\le \|x\|^2 + 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2$

$= (\|x\| + \|y\|)^2$,

e (4) segue estraendo le radici (positive).

(3') Ovvie conseguenze di (3)

(*) Se $y = 0$, $x\circ y = 0 = \|x\| \cdot \|y\|$. Se $y \ne 0$, P è di II grado.

(4') Da (4):

$\|x\| = \|x - y + y\| \le \|x-y\| + \|y\|$

e $\|y\| = \|y - x + x\| \le \|y-x\| + \|x\|$

$= \|x-y\| + \|x\|$,

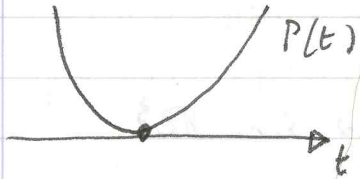
quindi $\|x\| - \|y\| \le \|x-y\|$ e $\|y\| - \|x\| \le \|x-y\|$,

da cui $|\|x\| - \|y\|| = \max(\|x\|-\|y\|, \|y\|-\|x\|)$

$\le \|x-y\|$. ∎

<u>Oss.</u> E' interessante considerare i casi di uguaglianza in (3) e (4).

• In (3), $|x\circ y| = \|x\|\cdot\|y\| \Leftrightarrow$ $y=0$ o ~~$\exists t$~~



$\exists t$: $x = -ty$

cioè ~~...~~:

$|(x\circ y)| = \|x\|\cdot\|y\| \Leftrightarrow$ x e y sono linearmente dipendenti ($\Leftrightarrow$ senza $(\frac{x}{\cdot}|\frac{y}{\cdot}) \le 1$).

Si ha $x\circ y = \|x\|\cdot\|y\| \Leftrightarrow$

$y = 0$ o $x = ty$ con $t > 0$

e $x\circ y = -\|x\|\cdot\|y\| \Leftrightarrow$

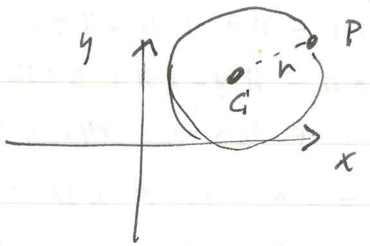
$y = 0$ o $x = ty$ con $t < 0$.

• In (4): $\|x\| + \|y\| = \|x+y\|$

$\Leftrightarrow$ $x = ty$ con $t \ge 0$ o $y = 0$

(in tutti i casi di uguaglianza, 0, x e y sono allineati).

• Equazione della circonferenza in $\mathbb{R}^2$



Siano $C = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$.

$S(C, r) = \{ P \in \mathbb{R}^2 : \| P - C \| = r \}$

Se $P = (x, y)$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad (\text{Pitagora})$$

cioè $\quad \| P - C \|^2 = r^2$

• Equazione della sfera in $\mathbb{R}^3$.

$C = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3, \quad r > 0.$

$S(C, r) = \{ P \in \mathbb{R}^3 : \| P - C \| = r \}.$

$P = (x, y, z) \in S(C, r) \Longleftrightarrow$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

• Def. Siano $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$.

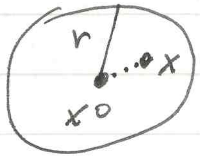
$S(x^0, r) = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \| x - C \| = r \}$ è la sfera di centro x^0 e raggio r in $\mathbb{R}^n$.

$x \in S(x^0, r) \Longleftrightarrow (x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2 = r^2.$

• La palla aperta di centro x^0 e raggio r in $\mathbb{R}^n$ è

$B(x^0, r) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \| x - x^0 \| < r \}$

$x \in B(x^0, r) \Longleftrightarrow (x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2 < r^2$

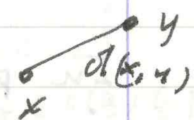


• $\overline{B(x^0, r)} = B(x^0, r) \cup S(x^0, r)$

$= \{ x \in \mathbb{R}^n : \| x - x^0 \| \le r \}$ è la palla chiusa di centro x^0 e raggio r.

Distanza. Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$d(x, y) := \| x - y \| \ge 0$ è



la distanza euclidea tra x e y. Ha le proprietà:

(D 1) $d(x, y) \ge 0 \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ e

$d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

(D 2) $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

(D 3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3 : d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$

(proprietà triangolare),

e anche

(D 4) $\forall x, y, a \in \mathbb{R}^3 : d(x + a, y + a) = d(x, a)$

(D 5) $\forall x, y \in \mathbb{R}^3 \ \forall \lambda \in \mathbb{R} : d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot d(x, y).$

ESERCIZIO: dimostrare tutto ciò.

Prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$.

Chiamo $\underline{i} = \underline{e}_1$, $\underline{j} = \underline{e}_2$, $\underline{k} = \underline{e}_3$ in $\mathbb{R}^3$.

Siano $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^3$:

$\mathbb{R}^3 \ni$ $$\underline{x} \times \underline{y} \overset{\text{def.}}{=} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}\,(x_2 y_3 - x_3 y_2)$$
$$- \underline{j}\,(x_1 y_3 - x_3 y_1)$$
$$+ \underline{k}\,(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$
$$= (x_2 y_3 - x_3 y_2;\ x_1 y_3 - x_3 y_1,\ x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

è il <u>prodotto vettoriale</u> di $\underline{x}$ e $\underline{y}$.

In particolare: $\underline{0} = \underline{i} \times \underline{i} = \underline{j} \times \underline{j} = \underline{k} \times \underline{k}$ e

$\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}$ $\qquad$ $\underline{j} \times \underline{i} = -\underline{k}$

$\underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}$ $\qquad$ $\underline{k} \times \underline{j} = -\underline{i}$

$\underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$ $\qquad$ $\underline{i} \times \underline{k} = -\underline{j}$

<u>Proprietà</u>. (1) $(\underline{x} + \underline{y}) \times \underline{z} = \underline{x} \times \underline{z} + \underline{y} \times \underline{z}$

(2) $(\alpha \underline{x}) \times \underline{y} = \alpha \cdot (\underline{x} \times \underline{y})$

(3) $\underline{x} \times \underline{y} + \underline{y} \times \underline{x} = 0$

(4) $\underline{x} \times \underline{y} = 0 \iff \underline{x}$ e $\underline{y}$ sono lin. dip.

(5) $\underline{x} \bullet \underline{y} \times \underline{z} = \det(\underline{x} | \underline{y} | \underline{z})$

(6) (Jacobi) $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) + \underline{b} \times (\underline{c} \times \underline{a}) + \underline{c} \times (\underline{a} \times \underline{b}) = 0$

(7) (Lagrange) $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \circ \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \circ \underline{b})$

(8) $\|a \times b\|^2 + |a \circ b|^2 = \|a\|^2 \cdot \|b\|^2$.

<u>Oss.</u> $\times$ non è associativo!

$(\underline{i} \times \underline{j}) \times \underline{j} = \underline{k} \times \underline{j} = -\underline{i} \neq \underline{0} = \underline{i} \times (\underline{j} \times \underline{j})$

<u>dim.</u> (1) - (5): esercizio.

(6) Se scelgo $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ in $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$, l'espressione è ~~...~~ nulla:
- se sono tutti distinti (p.es. $a = i, b = j, c = k$)
- se due sono uguali (p.es. $a = i = b$, $c = j$)
- se sono tutti uguali (p.es. $a = b = c = i$)

Sia $F(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) + \underline{b} \times (\underline{c} \times \underline{a}) + \underline{c} \times (\underline{a} \times \underline{b})$.

Allora $F(\alpha \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = \alpha F(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$

e $F(\underline{a}_1 + \underline{a}_2, \underline{b}, \underline{c}) = F(\underline{a}_1, \underline{b}, \underline{c}) + F(\underline{a}_2, \underline{b}, \underline{c})$

e formule simili valgono per le variabili $\underline{b}$ e $\underline{c}$.

Scrivendo $\underline{a} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}$

e così con $\underline{b}$ e $\underline{c}$, utilizzando la "multilinearità", si ha

$F(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = a_1 b_1 c_1 \cdot F(\underline{i}, \underline{i}, \underline{i}) + a_2 b_1 c_1 \cdot F(\underline{j}, \underline{i}, \underline{i})$

$+ \cdots = \underline{0} + \underline{0} + \cdots = \underline{0}$.

(7) Simile a (6). Pongo

$G(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) = \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) - [\underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})]$

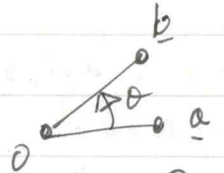
e verifico che (i) $G(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) = 0$ se $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ sono scelti in $\{\underline{i},\underline{j},\underline{k}\}$

(ii) che G è multilineare.

Da (i) e (ii) segue (7).

(8) segue facilmente dall'interpretazione geometrica di $\underline{a} \cdot \underline{b}$ e $\underline{a} \times \underline{b}$, riportate sotto. ∎

Interpretazione geometrica di $\underline{a} \cdot \underline{b}$



$|\underline{b} \cdot \underline{a}| = \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\| \cdot \cos\theta$

e segno$(\underline{b} \cdot \underline{a}) =$

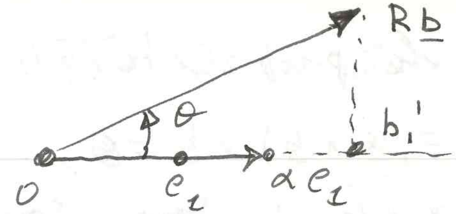
$$= \begin{cases} +1 \text{ se } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ -1 \text{ se } \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

(θ: per andare da $\underline{a}$ a $\underline{b}$ nel ~~senso pi~~ modo più breve).

Dim. $\underline{b} \cdot \underline{a} = (R\underline{b}) \cdot (R\underline{a})$ $\forall R \in O(2)$.

Scelgo R t.c. $R\underline{a} = \alpha \underline{e}_1$ con $\alpha > 0$ ($\alpha = \|R\underline{a}\| = \|\underline{a}\|$, dunque).

Sia $R\underline{b} = (b'_1, b'_2)$.



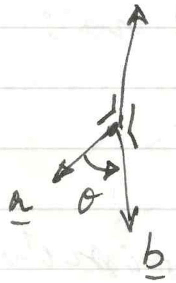
Per def., $(R\underline{b}) \cdot (R\underline{a}) = (b'_1, b'_2) \cdot (\alpha, 0)$

$= \alpha b'_1 = \alpha \cdot \|R\underline{b}\| \cdot \cos\theta =$

$= \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\| \cdot \cos\theta$:

$$\boxed{\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a} = \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\| \cdot \cos\theta}$$

Interpretazione geometrica di $\underline{a} \times \underline{b}$.



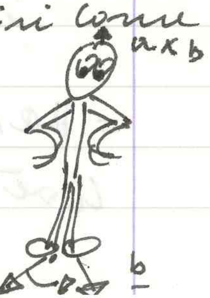
$\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a}, \underline{b}$

(cioè, $\underline{a} \times \underline{b} \cdot \underline{a} =$
$= \underline{a} \times \underline{b} \cdot \underline{b} = 0$),

$\|\underline{a} \times \underline{b}\| = \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\| \cdot \sin\theta$,

dove θ è l'angolo che va da $\underline{a}$ a $\underline{b}$ nel piano span$(\underline{a},\underline{b})$ facendo il giro più breve ($\theta \in (0,\pi)$).

$\underline{a} \times \underline{b}$ esce dal piano span$(\underline{a},\underline{b})$ nel verso di un cacciavite che giri come θ. Ovvero: un osservatore coi piedi in $\underline{0}$ e orientato come $\underline{a} \times \underline{b}$ osserva che si va da $\underline{a}$ a $\underline{b}$ nell'angolo minore in senso antiorario sul piano span$(\underline{a},\underline{b})$ come da lui osservato.



Dim. Per le proprietà (5),

$(\underline{a} \times \underline{b}) \circ \underline{a} = (\underline{a} \times \underline{b}) \circ \underline{b} = 0$,

quindi $\underline{a} \times \underline{b} \perp \operatorname{span}\{\underline{a}, \underline{b}\}$

(se $\underline{a} \neq \underline{0} \neq \underline{b}$: gli altri casi sono più facili).

~~Dall(8) segue che~~

$\cancel{\|a \times b\| \overset{(8)}{=} \sqrt{\|a\|^2\|b\|^2 - (a \cdot b)^2}}$

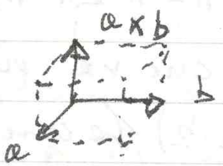
$= \cancel{\|a\|^2\|b\|^2}$

Usando ancora (5) ho:

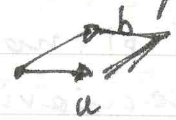
$\|a \times b\|^2 = a \times b \circ a \times b =$

$= \det(a \times b \mid a \mid b)$

$=$ Volume del parallelepipedo



$= \|a \times b\| \cdot$ Area del parallelogramma



(Poichè $a \times b$ è normale al parallelogramma

$= \|a \times b\| \cdot \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin\theta$

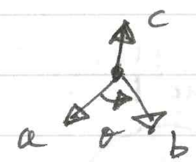
cioè: $\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin\theta$

Rimane solo da decidere il verso di $a \times b$.

Dal conto appena visto abbiamo che se a e b sono lin. indip. allora

$$\det(a \times b \mid a \mid b) = \|a \times b\|^2 > 0.$$
$$\|$$
$$\det(a \mid b \mid a \times b)$$

Ciò accade se e solo se i vettori lin. indip. $a, b, c = a \times b$ soddisfano la "regola del cacciavite" desiderata:



Nota. La questione del segno è importante: è legata alla presenza in $\mathbb{R}^n$ ($n=3$ in questo caso) di due orientazioni.