$\mathbb{R}^n$: metrica e topologia.

Df: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{d} [0, +\infty)$

$(x, y) \longmapsto d(x,y) := \|x-y\|.$

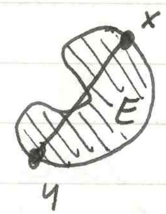
Vedi le proprietà basilari a p. 13.

Def. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è limitato $\iff$

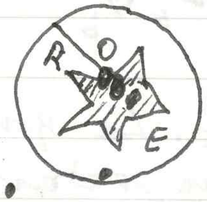
$\exists R>0 : E \subseteq \overline{B(0,R)}$.

E è limitato $\iff$ una delle seguenti vale:

- $\exists R>0 : E \subseteq B(0,R)$
- $\exists R>0 \ \exists x_0 \in \mathbb{R}^n : E \subseteq B(x_0, R)$
- $\exists R>0 \ \exists x_0 \in \mathbb{R}^n : E \subseteq \overline{B(x_0,R)}$
- $\operatorname{diam}(E) := \sup\{d(x,y) : x \in E, y \in E\} < \infty$
- $\sup\{\|x\| : x \in E\} < \infty$



$\|x-y\| = \operatorname{diam} E$



Esempi. ⓪ $B(x_0,R)$ è limitato in $\mathbb{R}^n$

① $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ è lim.

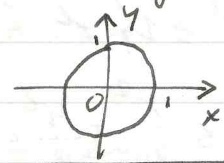
② $E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2-y^2=1\}$ non è lim.

③ $E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=x^2\}$ non è lim.

- E non è limitato se $\forall R>0 \ \exists x \in E : \|x\| > R$.

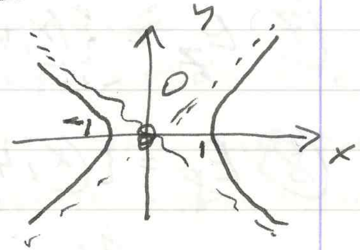
Vediamo gli esempi.

①



$E_1 \subseteq \overline{B(0,1)}$

②

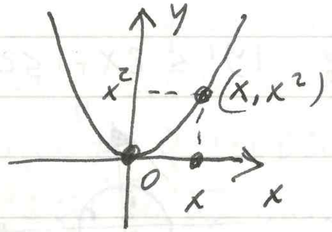


$(y, \sqrt{1+y^2}) \in E_2 \ \forall y$

e

$\|(y, \sqrt{1+y^2})\| = \sqrt{y^2+1+y^2} \xrightarrow[y \to +\infty]{} +\infty$

③

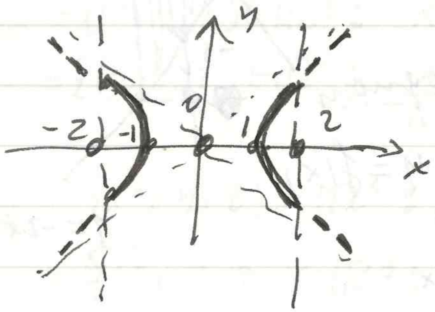


$(x,x^2) \in E_3 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e

$\|(x,x^2)\| = \sqrt{x^2+x^4} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

④ $E_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2-y^2=1$ e $|x| \le 2\}$ è limitato.

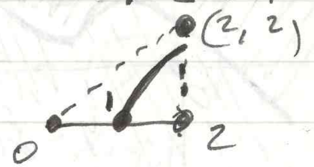
Infatti $|x| \le 2 \iff -2 \le x \le 2$ e



$(x,y) \in E_4$

$\Downarrow$

$x^2+y^2 \le 2^2+2^2=8$



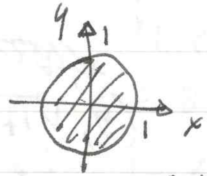
(5) $E_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$ è lim.

(6) $E_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \ge 1\}$ è illim.

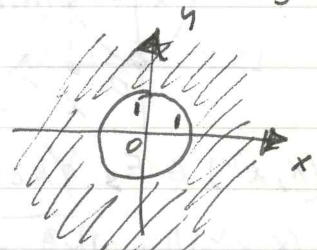
(7) $E_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 4\}$ è lim.

(8) $E_8 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \le 2x+1 \le 2\}$ è lim.

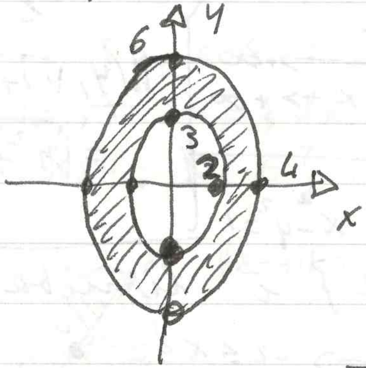
E_5



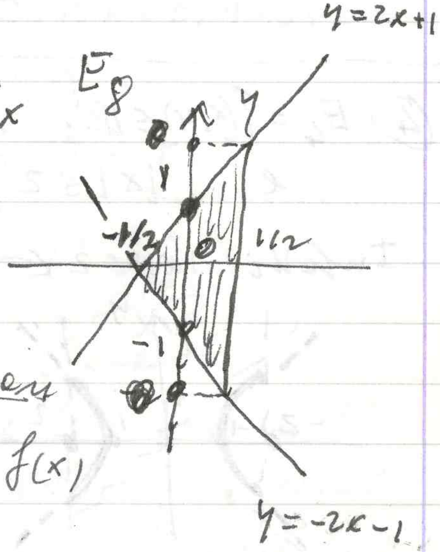
E_6



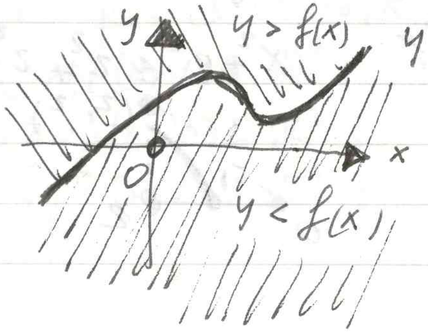
E_7



E_8



Trucchi per disegnare



Esercizio. Considerate le rette

$y = x+1$, $y = -x+1$, $y = 2x$,

~~considerare~~ definite le otto regioni ottenute rimpiazzando le uguaglianze con disuguaglianze, trovare quante di queste regioni sono vuote e tra quelle non vuote trovare quelle limitate.

Alcune delle otto regioni:

$A_1 = \{(x,y) : y \le x+1;\ y \le -x+1;\ y \le 2x\}$

$A_2 = \{(x,y) : y \le x+1;\ y \le -x+1;\ y \ge 2x\}$

eccetera...

Disegnare le regioni non vuote.

Vediamo ora alcuni esempi in $\mathbb{R}^3$.

$E_9 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \ge 4\}$

$E_{10} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z \ge 1\}$

$E_{11} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1\}$

$E_{12} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \ge x^2+y^2\}$

$E_{13} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2}\}$

$E_{14} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x \cdot y\}$

$E_{15} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1\}$

ESERCIZIO: Disegnare queste regioni.
Per sol. vedi P0