Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, e $\Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$.
f è <u>continua</u> in $\cancel{x}_0$ se
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega \ \|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Es. e proprietà elementari.

- $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_j$ è continua su $\mathbb{R}^n$ $(1 \leq j \leq n)$
- f e g continue in $x_0 \Rightarrow$
  $f+g$; $k \cdot f$ $(k \in \mathbb{R})$; $f \cdot g$; $1/f$ (se $f(x_0) \neq 0$)
  sono continue in x_0
- Se $\mathbb{R}^n \supseteq \Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è continua in x_0 e $f(\Omega) \subseteq I \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ è continua in $f(x_0)$, allora
  $\varphi \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ è continua in x_0.

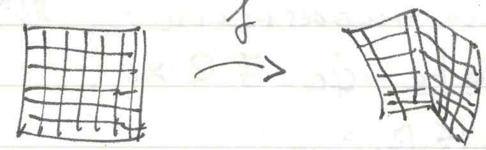
Def. Siano $\mathbb{R}^n \supseteq \Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$; $x_0 \in \Omega$;
$f = (f_1, \dots, f_m)$.
f è <u>continua</u> in $x_0 \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega : \|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

Oss. $\mathbb{R}^n \supseteq \Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ è continua in $x_0 \in \Omega$
$\Leftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, m\}$, $f_j : \Omega \to \mathbb{R}$ è continua in x_0.

Dim. ($\Rightarrow$) Sia f continua in x_0 e fissiamo $\varepsilon > 0$. Sia $j \in \{1, \dots, m\}$.
Esiste per ipotesi $\delta > 0 : \|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow$
$|f_j(x) - f_j(x_0)| \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |f_k(x) - f_k(x_0)|^2\right)^{1/2}$
$= \|f(x) - f(x_0)\| \leq \varepsilon$. Quindi, f_j è continua in x_0.

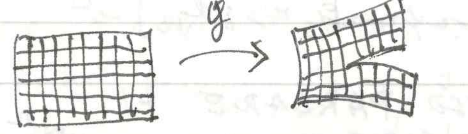
($\Leftarrow$) Sia f_j continua in x_0 per $j = 1, \dots, m$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Esiste per ipotesi $\delta_j > 0$:
$\|x - x_0\| \leq \delta_j \Rightarrow |f_j(x) - f_j(x_0)| \leq \varepsilon / m^{1/2}$.
Sia $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\} > 0$.
Se $\|x - x_0\| \leq \delta_j$, allora
$\|f(x) - f(x_0)\| = \left(\sum_{k=1}^{m} |f_k(x) - f_k(x_0)|^2\right)^{1/2}$
$\leq \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2\right)^{1/2} = \left(m \frac{\varepsilon^2}{m}\right)^{1/2} = \varepsilon$ ∎

Oss. Come al solito, ci sarebbe bastato mostrare che $\|f(x) - f(x_0)\| \leq \varphi(\varepsilon)$ con $\varphi : (0, 1) \to \mathbb{R}^+$, $\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(\varepsilon) = 0$.



R

Una funzione continua
$\mathbb{R}^2 \supseteq R \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$



R

Una funzione discontinua
$\mathbb{R}^2 \supseteq R \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2$

Note. Le funzioni continue $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ esibiscono comportamenti più vari del caso 1-dim. Allo stesso modo, le discontinuità di funzioni $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ possono essere di tipologia assai diversa.

Def. Una <u>successione</u> $\{a_k\}$ in $\mathbb{R}^n$ è una funzione
$$\mathbb{N} \xrightarrow{a} \mathbb{R}^n, \quad k \longmapsto a_k$$
che a ogni $k \in \mathbb{N}$ associa $a_k \in \mathbb{R}^n$.

Def. Sia $\{a_k\}$ una successione in $\mathbb{R}^n$ e sia $\ell \in \mathbb{R}^n$.
$$\lim_{k\to\infty} a_k = \ell \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k \geq K(\varepsilon) : \| a_k - a_{K(\varepsilon)} \| \leq \varepsilon.$$
ℓ è il <u>limite</u> di $\{a_k\}$ per $k \to \infty$.

- $\{a_k\}$ è <u>convergente</u> se $\exists \ell \in \mathbb{R}^n$: $\lim_{k\to\infty} a_k = \ell$.

Def. Sia $\{a_k\}$ una successione in $\mathbb{R}^n$. $\{a_k\}$ è <u>limitata</u> se $\exists R > 0$: $\forall k \in \mathbb{N}$: $\|a_k\| \leq R$.

- <u>Oss.</u> $\{a_k\}$ convergente $\Rightarrow$ $\{a_k\}$ è limitata.

<u>NOTA.</u> NON HA SENSO PARLARE DI SUCCESSIONI (DE)CRESCENTI IN $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

~~Teorema~~ <u>Definizione</u>. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $P \in \mathbb{R}^n$. P è <u>punto di accumulazione</u> per Ω se $\forall \varepsilon > 0\ \exists Q \in \Omega$, $Q \neq P$:
$$\|P - Q\| \leq \varepsilon.$$

<u>Oss.</u> (1) non tutti i punti di Ω sono di accumulazione per Ω.
(2) non tutti i punti di accumulazione di Ω stanno in Ω.
Ciò si vede già in $\mathbb{R}$.
Sia $\Omega = [0,1[\cup \{2\}$:
$2 \in \Omega$, ma non è di acc. per Ω.
$1 \notin \Omega$, ma è di acc. per Ω.

<u>~~Teorema~~</u>. Sia $\mathbb{R}^n \supseteq \Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \Omega$. Allora,

f è continua in x_0 se e solo se
$$\forall \{a_k\} \text{ in } \Omega : a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0 \text{ in } \mathbb{R}^n \implies f(a_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0) \text{ in } \mathbb{R}.$$

<u>Dim.</u> ($\Rightarrow$) Supponiamo che f sia continua in x_0, che $\{a_k\}$ sia una successione in Ω e che $\lim_{k\to\infty} a_k = x_0$. Fisso $\varepsilon > 0$ qualunque. Sia $\delta = \delta(\varepsilon)$ t.c. $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Poiché $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$, $\exists K(\delta)$: $\forall k \geq K(\delta)$ si ha $\|a_k - x_0\| \leq \delta$, dunque anche $|f(a_k) - f(x_0)| <$

In conclusione, $\exists K_0 = K(\sigma)$:

$K \geq K_0 \Rightarrow |f(a_K) - f(x_0)| \leq \sigma$

ciò vale $\forall \sigma > 0$, quindi

$$f(a_K) \xrightarrow[K\to\infty]{} f(x_0) \text{ in } \mathbb{R}.$$

($\Leftarrow$) Supponiamo che, per assurdo, f non sia continua in x_0.
Allora ~~...~~ esiste $\varepsilon_0 > 0$ t.c. $\forall K \in \mathbb{N}$, ~~...~~ si ha che $\exists a_K \in \Omega$ con $\|a_K - x_0\| \leq \frac{1}{2^K}$,
ma $|f(a_K) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$.
La successione $\{a_K\}$ verifica quindi:

$$\lim_{K\to\infty} a_K = x_0 \text{ in } \mathbb{R}^n,$$

ma non vale che ~~...~~ $\lim_{K\to\infty} f(a_K) = f(x_0)$ in $\mathbb{R}$ ∎

Per i limiti di ~~...~~ successioni valgono tutte le proprietà algebriche dei limiti in $\mathbb{R}$.
Una breve lista (non completa):

- Sia $\{a_K\}$ una successione in $\mathbb{R}^n$; $a_K = (a^1_K, a^2_K, \dots, a^n_K)$.

Allora $\exists \lim_{K\to\infty} a_K = \ell$ in $\mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow$ per $j = 1, 2, \dots, n$ $\exists \lim_{K\to\infty} a^j_K$ in $\mathbb{R}$ e

$$\lim_{K\to\infty} (a^1_K, a^2_K, \dots, a^n_K) = \left(\lim_{K\to\infty} a^1_K, \dots, \lim_{K\to\infty} a^n_K\right).$$

- Siano $\{a_K\}$ e $\{b_K\}$ successioni in $\mathbb{R}^n$ t.c. $\exists \lim_{K\to\infty} a_K$, $\exists \lim_{K\to\infty} b_K$.

Allora

(1) $\exists \lim_{K\to\infty} (a_K + b_K) = \lim_{K\to\infty} a_K + \lim_{K\to\infty} b_K$ in $\mathbb{R}^n$

(2) $\exists \lim_{K\to\infty} (a_K \cdot b_K) = \left(\lim_{K\to\infty} a_K\right) \cdot \left(\lim_{K\to\infty} b_K\right)$ in $\mathbb{R}$

(3) $\exists \lim_{K\to\infty} (a_K \times b_K) = \left(\lim_{K\to\infty} a_K\right) \times \left(\lim_{K\to\infty} b_K\right)$ in $\mathbb{R}^3$ (se $n = 3$)

(4) Se $\{\alpha_K\}$ è una successione in $\mathbb{R}$ e $\exists \lim_{K\to\infty} \alpha_K$ in $\mathbb{R}$, allora

$$\exists \lim_{K\to\infty} (\alpha_K a_K) = \left(\lim_{K\to\infty} \alpha_K\right) \left(\lim_{K\to\infty} a_K\right) \text{ in } \mathbb{R}^n$$

- Possiamo pensare a $M_{m\times n} \equiv \mathbb{R}^{n\cdot m}$ come a uno spazio vettoriale $n\cdot m$-dimensionale:

se $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$, allora $\|A\| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$.

Le operazioni matriciali sono a loro volta continue. P. es.

- $\{A_k\}$ una successione in $\mathcal{M}_{m\times n}$ e sia $\{B_k\}$ una successione in $\mathcal{M}_{p\times m}$;

se $\exists \lim_{k\to\infty} A_k$ in $\mathcal{M}_{m\times n}$ e

$\exists \lim_{k\to\infty} B_k$ in $\mathcal{M}_{p\times m}$, allora

$$\exists \lim_{k\to\infty} (B_k A_k) = \left(\lim_{k\to\infty} B_k\right)\cdot\left(\lim_{k\to\infty} A_k\right) \text{ in } \mathcal{M}_{p\times n}$$

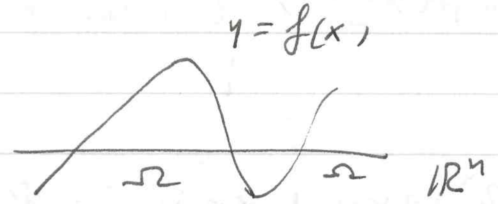
- Se $\{A_k\}$ è una successione in $\mathcal{M}_{n\times n}$, ~~allora~~ $\exists \lim_{k\to\infty} A_k = A$ in $\mathcal{M}_{n\times n}$

allora $\exists \lim_{k\to\infty} (\det A) = \det\left(\lim_{k\to\infty} A_k\right)$ in $\mathbb{R}$.

Topologia elementare.

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme. Diciamo che Ω è aperto se e solo se esiste una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua t.c.

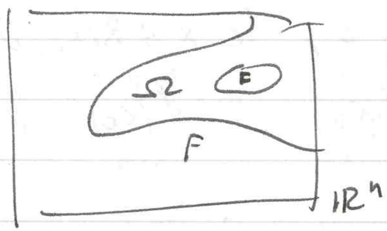
$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\}.$$



Notazione. Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è un insieme, $C(A) = \{f: A \to \mathbb{R}$ t.c. f è continua in $A\}$, dove "continua in A" significa "$\forall x \in A$, f è continua in x".

Def. $F \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiuso $\iff$ $\exists f \in C(\mathbb{R}^n)$: $F = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq 0\}$.

OSS. $\forall \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$: Ω è aperto $\iff$ $\underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \Omega}_{F}$ è chiuso.



Dim. Ω aperto $\Rightarrow \exists f \in C(\mathbb{R}^n)$: $\Omega = \{x : f(x) > 0\}$

Ora $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \iff f(x) \leq 0 \iff -f(x) \geq 0$: $\mathbb{R}^n \setminus \Omega = \{x : -f(x) \geq 0\}$, che è chiuso poiché $-f \in C(\mathbb{R}^n)$.

Allo stesso modo si mostra la proprietà inversa.