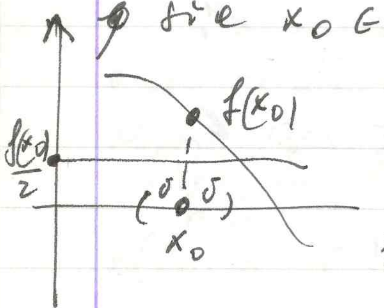
Def. ~~[illegible]~~
$K \subseteq \mathbb{R}^n$ è <u>compatto</u> se è chiuso e limitato.

<u>Teorema</u>. (1) $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono aperti in $\mathbb{R}^n$.
(2) Sia $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Ω è aperto in $\mathbb{R}^n \iff$
$\forall x_0 \in \Omega \ \exists R > 0 : \ B(x_0, R) \subseteq \Omega$.

<u>Dim.</u> (2) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\Omega \neq \emptyset$, e sia $x_0 \in \Omega$ e sia $f \in C(\mathbb{R}^n)$ t.c.



$\Omega = \{x : f(x) \neq 0\}$. Allora
$f(x_0) > 0$.

Fisso $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$

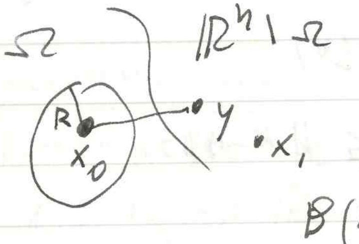
$\exists \delta > 0$ t.c. $x \in B(x_0, \delta)$ (cioè: $\|x - x_0\| < \delta$)
$\Rightarrow -\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$, se $x \in B(x_0, \delta)$,
quindi, $f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon = f(x_0) - \dfrac{f(x_0)}{2}$
$= \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$

Quindi, $B(x_0, \delta) \subseteq \{x : f(x) > 0\}$.

Supponiamo che, al contrario,
$\Omega \neq \emptyset$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sia t.c.
$\forall x_0 \in \Omega \ \exists R = R(x_0) : \ B(x_0, R) \subseteq \Omega$.
Definisco la funzione $f_\Omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
$f_\Omega(x) = \text{distanza}\,(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$
$\stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\|y - x\| : y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega\} \geq 0 \ \forall x$

> <u>Lemma</u>. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, e sia
> $f_A(x) = \text{distanza}\,(x, \mathbb{R}^n \setminus A)$
> $= \inf\{\|y - x\| : y \in \mathbb{R}^n \setminus A\}$.
> Allora, $f_A \in C'(\mathbb{R}^n)$.

Lasciamo per dopo la dimostrazione del Lemma e continuiamo col Teorema.

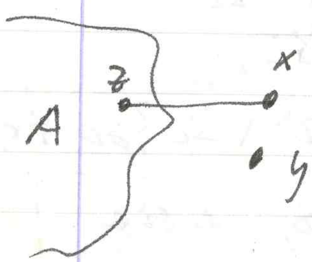


Sia $x_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$.
Chiaramente, $f_\Omega(x_1) = 0$
($f_\Omega(x_1) \leq \|x_1 - x_1\| = 0$).
Sia $x_0 \in \Omega$ e sia $R > 0$:
$B(x_0, R) \subseteq \Omega$. Allora,

$\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \Rightarrow y \notin B(x_0, R) \Rightarrow \|y - x_0\| \geq R$
$\Rightarrow f_A(x_0) = \inf\{\|y - x_0\| : y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega\} \geq R > 0$.

Ne segue che $f_\Omega(x) > 0 \iff x \in \Omega$, cioè che Ω è aperto ■

Dimostrazione del Lemma:



Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall z \in A$ ho che

$$\|y - z\| \le \|y - x\| + \|x - z\|$$

e $$\|x - z\| \le \|x - y\| + \|y - z\|$$

Quindi:

$\cancel{f_A(x) = \inf\{\|x - w\| : w \in A\}}$

$$f_A(x) = \inf\{\|x - w\| : w \in A\} \le \|x - z\|$$
$$\le \|x - y\| + \|y - z\| \quad \forall z \in A$$
$$\Rightarrow f_A(x) \le \|x - y\| + \inf\{\|y - z\| : z \in A\}$$
$$= \|x - y\| + f_A(y)$$

cioè: $f_A(x) - f_A(y) \le \|x - y\|$.

Allo stesso modo:

$$f_A(y) - f_A(x) \le \|y - x\| = \|x - y\|,$$

cioè:
$$|f_A(x) - f_A(y)| \le \|y - x\|$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Ne segue che se $a_k \xrightarrow[k \to \infty]{} x$ in $\mathbb{R}^n$,

allora $\|a_k - x\| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$,

quindi $|f_A(x) - f_A(a_k)| \xrightarrow[k \to 0]{} 0$

$\Rightarrow f_A(a_k) \xrightarrow[k \to \infty]{} f_A(x)$ in $\mathbb{R}$.

Quindi, f_A è continua in ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ■

Siamo ora in grado di enunciare alcuni teoremi fondamentali sulle funzioni continue.

Teorema di Weierstrass. Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto e sia $f \in C(K, \mathbb{R})$, $f : K \to \mathbb{R}$.

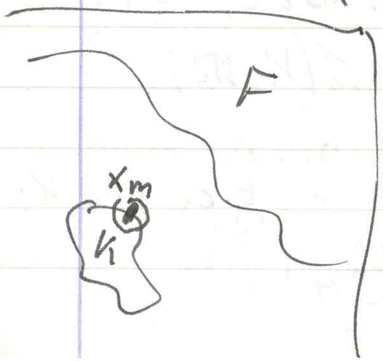
Allora, $\exists\, x_m, x_M \in K$ t.c. $\forall x \in K$:
$$f(x_m) \le f(x) \le f(x_M).$$

Definizione. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.
$a \in A$ è un <u>punto di massimo</u> per f in A se
$\forall x \in A: \ f(x) \leq f(a)$.

$b \in B$ è <u>p.to di minimo</u> per f in ~~A~~ A se
$\forall x \in A: \ f(b) \leq f(x)$.

<u>T. Weierstrass</u>: $f \in C(K)$, K compatto $\Rightarrow f$ ha p.ti di massimo e di minimo in K.

<u>Esempio</u> ~~Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $K \subseteq \mathbb{R}^n$~~,
K ~~compatto~~ Siano $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto e $F \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso,
$F \cap K = \emptyset$.
Allora,
$$\text{distanza}(F, K) := \inf\{\|x-y\| : x \in K, y \in F\} > 0.$$



~~Dim~~ Dim.
Considero la funzione
$f_F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$f_F(x) = \text{distanza}(x, F)$.
f_F è continua e per T. Weierstrass,
$f_F|_K$, la restrizione di f_F a K,
ha un p.to di minimo $x_m \in K$.

Cioè, $f_F(x_m) = \min\limits_{x \in K}\left(\inf\{\|x-y\| : y \in F\}\right)$
$= d(F, K)$.

Devo verificare che $f_F(x_m) > 0$.

F chiuso $\Rightarrow x_m \in K \subseteq \mathbb{R}^n \setminus F$ aperto,
quindi $\exists B(x_m, R) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus F$ con $R > 0$.
Cioè, $\forall y \in F: \ \|y - x_m\| \geq R$,
quindi $f_F(x_m) \geq R > 0$ ∎

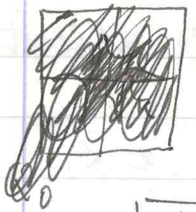
<u>Teorema</u> di ~~Bolzano-Wei~~
<u>Heine-Borel</u>.

Sia $\{a_k\}$ una successione in $\mathbb{R}^n$, limitata.
Allora, esiste una sottosuccessione
$\{a_{k_\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{N}}$ di $\{a_k\}$ t.c.

$$\exists \lim_{\lambda \to \infty} a_{k_\lambda} \in \mathbb{R}^n.$$

La faccio per $n = 2$.

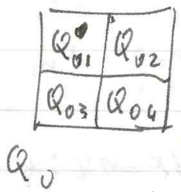
dim. Poiché $\{a_n\}$ è limitata, troviamo $m_0 \in \mathbb{Z}$ t.c.



$\{a_n\} \subseteq [-2^{m_0}, 2^{m_0}] \times [-2^{m_0}, 2^{m_0}] = Q_0$

Sia $b_0 = a_0$

Divido Q_0 in 4 quadrati uguali:



Uno dei 4 quadrati, diciamo Q_{0j_1} $(1 \le j_1 \le 4)$, contiene infiniti termini della successione.

Prendo $b_1 = a_{k_1} \in Q_{0j_1} = Q_1$ $(k_1 > 0)$

Divido Q_1 in 4 quadrati uguali chiusi

$Q_1 = Q_{11} \cup Q_{12} \cup Q_{13} \cup Q_{14}$

Uno di questi contiene infiniti termini della successione. Prendo $b_2 = a_{k_2} \in Q_{1j_2} = Q_2$ t.c. $k_2 > k_1$ (posso farlo in virtù degli infiniti termini di $\{a_k\}$).

~~allora~~ Itero la procedura.

Al passo m ho già scelto

$b_0 = a_0$; $b_1 = a_{k_1}$; $\dots$; $b_m = a_{k_m}$

con $0 < k_1 < \dots < k_m$.

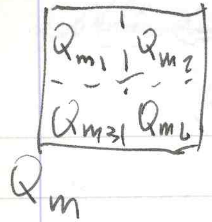
Ho che

(i) $b_0 \in Q_0 \supseteq b_1 \in Q_1 \supseteq \dots \supseteq b_m \in Q_m$

$$Q_0 \supseteq Q_1 \supseteq \dots \supseteq Q_m$$

(ii) Il quadrato Q_j ha lato $2^{m_0 - j}$ $(j = 1, \dots, m)$

(iii) Q_m contiene infiniti punti di $\{a_k\}$.



Divido ancora Q_m in quattro quad. uguali, uno dei quali ($Q_{mj_{m+1}}$) contiene infiniti punti della successione $\{a_k\}$, trovo così $b_{m+1} \in Q_{mj_{m+1}} = Q_{m+1}$.

Ho così costruito la sottosuccessione $\{b_m = a_{k_m}\}$ di $\{a_k\}$.

Devo mostrare che $\exists \lim_{m \to \infty} b_m$.

Se $Q_m = I_m \times J_m$, con

$I_m, J_m \subseteq \mathbb{R}$, intervalli di lato $2^{m_0 - m}$;

allora $I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots \supseteq I_m \supseteq I_{m+1}$

e $J_0 \supseteq J_1 \supseteq \dots \supseteq J_m \supseteq J_{m+1}$

Se $b_m = (c_m, d_m)$, poi, ho $c_m \in I_m$ e $d_m \in J_m$.

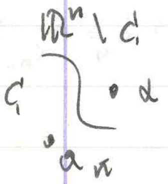
Per il Teorema di Heine-Borel in $\mathbb{R}$,

$\exists\, c = \lim_{m \to \infty} c_m$ e $\exists\, d = \lim_{m \to \infty} d_m$

$\Rightarrow \exists \lim_{m \to \infty} b_m = \lim_{m \to \infty} (c_m, d_m) = (c, d)$. ■

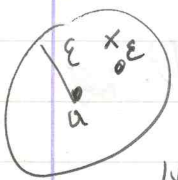
Teorema. Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$. C è chiuso $\Longleftrightarrow$ per ogni successione $\{a_k\}$ in C,
$\exists \lim_{k \to \infty} a_k = \alpha \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \alpha \in C$.

<u>Dim.</u> ($\Rightarrow$) C chiuso $\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus C$ aperto.



Sia per assurdo $\alpha = \lim_k a_k \in \mathbb{R}^n \setminus C$, con $\{a_k\}$ in C.
Allora $\exists \varepsilon > 0 : B(\alpha, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus C$ perchè $\mathbb{R}^n \setminus C$ è aperto. Cioè:
$\forall k : a_k \notin B(\alpha, \varepsilon) \Rightarrow \forall k : \| a_k - \alpha \| \geq \varepsilon$
$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} a_k \neq \alpha$, assurdo.

($\Leftarrow$) C non chiuso $\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus C$ non aperto
$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}^n \setminus C$ t.c. nessuna palla $B(a, \varepsilon)$ è contenuta in $\mathbb{R}^n \setminus C$.
Cioè, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in C : \| x_\varepsilon - a \| < \varepsilon$.



Quindi $\forall k \in \mathbb{N} \ \exists a_k \in C$:
$\| a_k - a \| < \frac{1}{k}$.
Ho dunque $\lim_{k \to \infty} a_k = a \notin C$
per qualche $\{a_k\}$ in C, che contraddice l'ipotesi ∎

~~Corollario~~ **Teorema.**
Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora, K è compatto sse
ogni successione $\{a_k\}$ in K ha una sottosuccessione $\{a_{k_\ell}\}$ t.c.
$\exists \lim_{\ell \to \infty} a_{k_\ell} \in K$.

<u>Dim</u> ($\Rightarrow$) Poichè K compatto è limitato, una successione $\{a_k\}$ in K è limitata
$\Rightarrow \exists \lim_{\ell \to \infty} a_{k_\ell} = \alpha \in \mathbb{R}$; ma K è chiuso
$\Rightarrow \alpha \in K$.

($\Leftarrow$) K non compatto $\Rightarrow$ K non chiuso o K limitato.
Se K non è limitato,
$\forall m \in \mathbb{N} \ \exists x_m \in K : \| x_m \| \geq m$.
La succ. $\{x_m\}$ non è limitata.
Se K non è chiuso, allora $\exists \{a_k\}$ in K t.c. $\exists \lim_{k \to \infty} a_k = \alpha \notin K$.
Chiaramente, ciò esclude che vi siano sottosuccessioni convergenti in K ∎

Possiamo ora dimostrare il Teorema di Weierstrass.

Dim. del Teorema di Weierstrass.

Sia $M = \sup\{f(x) : x \in K\}$.

Esiste una successione $\{x_j\}$ in K t.c.

(i) $\{f(x_j)\}$ è crescente in $\mathbb{R}$;

(ii) $\lim_{j \to \infty} f(x_j) = M$.

Lo stesso già visto in An. Mat. 1, ma lo ridimostro.

Caso (1). $M = +\infty$.

Considero $x_0 \in K$: $f(x_0) \geq 0$.

Se ho già scelto $x_0, \dots, x_{j-1}$ t.c. $f(x_0) \leq f(x_1) \leq \dots \leq f(x_{j-1})$ e $f(x_k) \geq k$ per $k = 0, \dots, j-1$; poiché $\sup_K f = +\infty$, trovo $x_j \in K$: $f(x_j) \geq \max\{j, f(x_{j-1})\}$.

Produco così la mia successione.

Caso (2). $M < +\infty$.

Scelgo $x_1 \in K$: $M - 1 \leq f(x_1) < M$ e, se $x_1, \dots, x_{j-1}$ sono stati scelti, trovo x_j in K tale che

$$f(x_j) \geq \max\{M - \tfrac{1}{j}, f(x_{j-1})\}.$$

Produco così la mia successione.

Poiché K è limitato, esiste una sottosuccessione $\{x_{j_\ell}\}$ di $\{x_j\}$ t.c. $\exists \lim_{\ell \to \infty} x_{j_\ell} = \bar{x}$ (T. di Heine-Borel).

Poiché K è chiuso, $\bar{x} \in K$.

Poiché f è continua, $\exists \lim_{\ell \to \infty} f(x_{j_\ell}) = f(\bar{x})$.

Ma $\lim_{\ell \to \infty} f(x_{j_\ell}) = M$,

quindi $\exists \bar{x} \in K$: $f(\bar{x}) = M = \sup_K f$

(ciò implica anche che $M \neq +\infty$) ■

Allo stesso modo mostriamo l'esistenza di $\underline{x} \in K$: $f(\underline{x}) = \inf_K f$.

Quindi, $\forall x \in K$:

$$f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\bar{x})$$ ■