## Curve e insiemi connessi per archi.

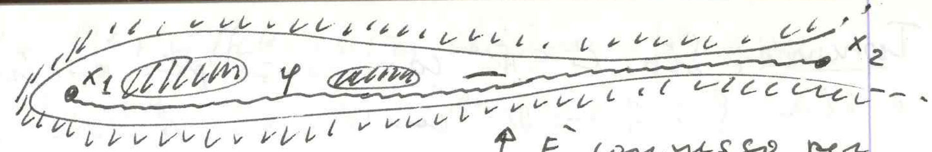
**Def.** Una curva in $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è una funzione continua
$$I \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$$
con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $\varphi(I) = \{\varphi(t) : t \in I\} \subseteq A$.

- L'insieme $\varphi(I)$ è la traccia della curva.
- La curva $\varphi$ è semplice se $\forall t_1 < t_2$ in $I$: $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) \Rightarrow$ ~~$t_1 = \min I$ e $t_2 = \max I$~~ $I = [t_1, t_2]$ è l'intervallo chiuso e limitato avente $t_1$ e $t_2$ come estremi.

non è semplice — non è semplice — è semplice — è semplice.

- $\varphi$ è ~~aperta~~ chiusa se $I = [\alpha, \beta]$ e $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$; altrimenti è aperta.

**Def.** Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$. $C$ è connesso per archi se $\forall x_1, x_2 \in C$ $\exists$ una curva $\varphi$ in $C$, $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$, t.c. $\varphi(\alpha) = x_1$ e $\varphi(\beta) = x_2$.




↑ È connesso per archi

← Non è connesso per archi.

**Teorema degli zeri.** Sia $C \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua, con $C \subseteq \mathbb{R}^n$ connesso per archi.
Se $\exists x_1, x_2 \in C$ : $f(x_1) < 0 < f(x_2)$, allora
$\exists x \in C$ : $f(x) = 0$.

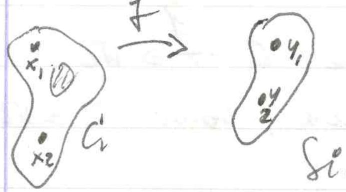
**Corollario.** Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ connesso per archi e sia $f : C \to \mathbb{R}$ continua. Allora, $f(C)$ è ~~come~~ un ~~uno~~ intervallo in $\mathbb{R}$, avente come estremi $\inf_C f = a$ e $\sup_C f = b$.

**Dim.** del Teorema. Sia $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ una curva in $C$: $\varphi \in C([\alpha, \beta], \mathbb{R}^n)$ e $\varphi([\alpha, \beta]) \subseteq C$.
Allora $f \circ \varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ è continua (è composizione di due funzioni continue),
$(f \circ \varphi)(\alpha) = f(x_1) < 0 < f(x_2) = (f \circ \varphi)(\beta)$.
Per il T. degli zeri di Analisi 1,
$\exists t \in [\alpha, \beta]$ : $f(\varphi(t)) = (f \circ \varphi)(t) = 0$.
Posto $\varphi(t) = x \in C$ : $f(x) = 0$ ∎

Invece di dedurre il Corollario dal Teorema degli zeri, lo deduciamo da un fatto più generale!

**Teorema.** Sia $G \subseteq \mathbb{R}^n$ connesso per archi e sia $f : G \to \mathbb{R}^m$ continua. Allora, $f(G)$ è connesso per archi in $\mathbb{R}^m$.

**Dim.**




Siano $y_1, y_2 \in f(G)$.
Allora $\exists\, x_1, x_2 \in G$:
$y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$.
Sia $[\alpha, \beta] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$ una curva in $G$ che congiunge $x_1$ e $x_2$: $\varphi(\alpha) = x_1$ e $\varphi(\beta) = x_2$.
Allora $f \circ \varphi$ è una curva in $f(G)$ che congiunge $\varphi(x_1) = y_1$ e $\varphi(x_2) = y_2$: ho mostrato che ogni coppia di punti $y_1, y_2$ in $f(G)$ è congiunta da una curva in $f(G)$. ■

**Dim.** del Corollario. Dal Teo. che precede, $f(G)$ è connesso per archi in $\mathbb{R}$. Voglio dimostrare che
$(\inf_G f, \sup_G f) \subseteq f(G)$.
Supponiamo p.A. che ciò sia falso:
$\exists\, y$: $\inf_G f < y < \sup_G f$ e $y \notin f(G)$.
Siano $f(x_1), f(x_2) \in f(G)$:
$$\inf_G f \leq f(x_1) < y < f(x_2) \leq \sup_G f.$$

[Un $f(x_1)$ siffatto esiste, altrimenti avrei $\inf_G f \geq y$, contro l'ipotesi.]

~~La curva in $\mathbb{R}$, $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$~~
~~$t \mapsto f(x_1) + t\,[f(x_2) - f(x_1)]$~~,

Ogni curva in $\mathbb{R}$ che congiunge $f(x_1)$ e $f(x_2)$;
$\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ cont., $\varphi(\alpha) = f(x_1)$ e $\varphi(\beta) = f(x_2)$;
deve passare anche per $y$:
$$\varphi(\alpha) - y = f(x_1) - y < 0 < f(x_2) - y = \varphi(\beta) - y$$
$$\Rightarrow \exists\, t \in (\alpha, \beta) : \varphi(t) - y = 0.$$
Poiché $f(G)$ è connesso per archi, ne segue che $y \in f(G)$.
Quindi,
$$(\inf_G f, \sup_G f) \subseteq f(G)$$ ■

Ne segue che, se $f$ è continua su $G$, connesso per archi in $\mathbb{R}^n$, allora:

(1) $f$ ha MAX e min in $G \Rightarrow f(G) = [\min_G f, \mathrm{MAX}_G f]$

(2) $f$ ha min, no MAX in $G \Rightarrow f(G) = [\min_G f, \sup_G f)$

(3) $f$ ha MAX, no min in $G \Rightarrow f(G) = (\inf_G f, \mathrm{MAX}_G f]$

(4) $f$ non ha min, nè MAX in $G \Rightarrow f(G) = (\inf_G f, \sup_G f)$.

Per T. Weierstrass, se $G$ è compatto e connesso per archi e $f : G \to \mathbb{R}$ è continua, allora vale (1).