Coordinate polari in $\mathbb{R}^2$ e cilindriche in $\mathbb{R}^3$.

Def. La mappa $\mathbb{R}^2 \supseteq [0,+\infty)\times\mathbb{R} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2$

$$F(r,\theta) = (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

assegna al punto $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ le sue coordinate polari (r,θ).

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

La coordinata radiale r è univocamente determinata: $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

Non è così per la coordinata angolare θ:

(1) se $(x,y)=(0,0)$ allora

$(0,0) = F(0,\theta) \quad \forall\theta\in\mathbb{R}$

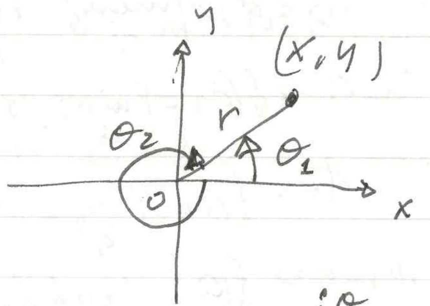
(2) se $(x,y)\neq(0,0)$ e

$(x,y) = F(r,\theta)$,

allora $(x,y) = F(r,\theta_2) \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}: \theta_2-\theta = 2k\pi$.

Cioè: $F(r,\theta+2k\pi) = F(r,\theta) \quad \forall k\in\mathbb{Z}$

$\forall r\geq 0 \ \forall\theta\in\mathbb{R}$



Oss. $(x,y)\equiv x+iy = r\cdot e^{i\theta} = r\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\equiv (r\cos\theta, r\sin\theta)$: abbiamo già incontrato queste coordinate in An. Mat. 1.

A volte si sceglie un argomento principale, imponendo che θ stia in un intervallo di lunghezza 2π fissato:

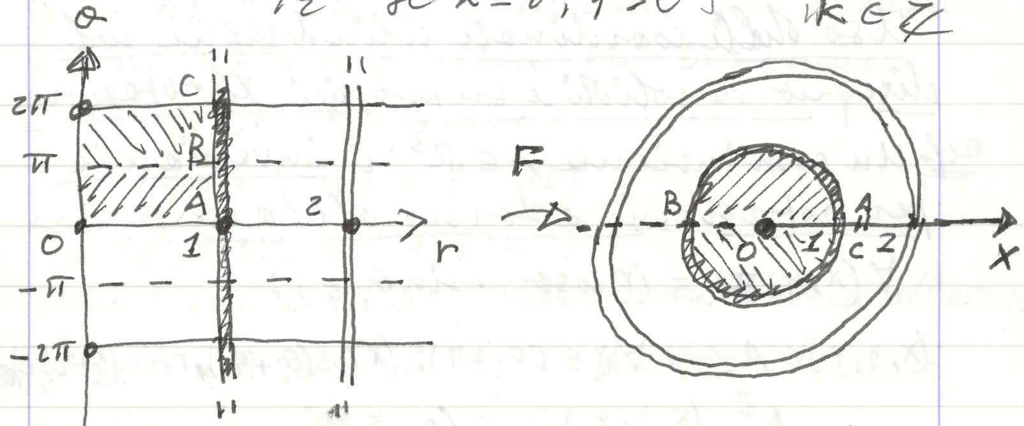
$[0,2\pi)$, $[-\pi,\pi)$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$

sono i più popolari.

$$\begin{cases} x^2+y^2 = r^2 \\ \dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta \quad (\text{se } x\neq 0) \end{cases}$$

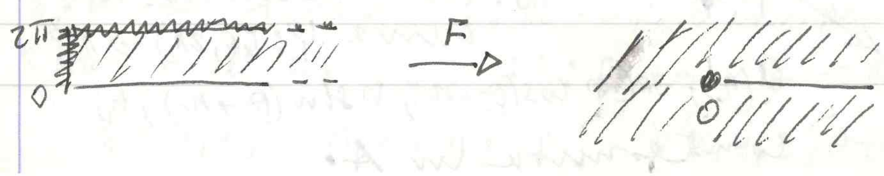
$$\theta = \left.\begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2) & \text{se } x>0 \\ \operatorname{arctg}(y/x)+\pi \in (\pi/2, \tfrac{3}{2}\pi) & \text{se } x<0 \end{cases}\right\} + 2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\theta = \left.\begin{cases} -\pi/2 & \text{se } x=0,\ y<0 \\ \pi/2 & \text{se } x=0,\ y>0 \end{cases}\right\} + 2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$



$F: (0,+\infty)\times[0,2\pi) \to \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

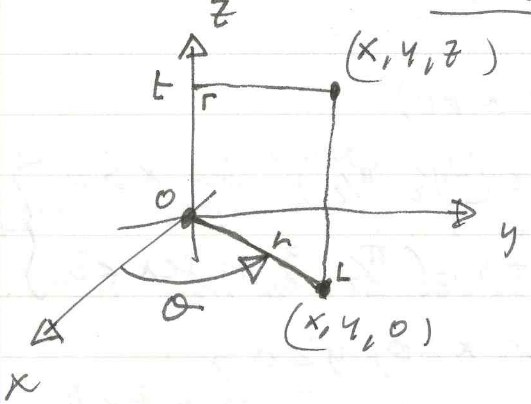
è biunivoca:



Def. La mappa $G : [0,+\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$G(r,\theta,t) = (x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, t)$

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = t \end{cases}$ assegna al punto (x,y,z) le sue coordinate cilindriche.

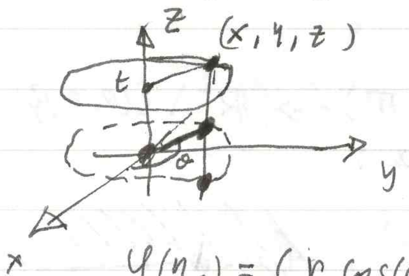


Uso delle coordinate cilindriche nel disegno di solidi e superfici di rotazione.

Def. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$ è invariante per rotazioni attorno all'asse z $\iff$

$\forall (x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, t)$:

$(x,y,z) \in A \iff \forall \eta \in [0,2\pi) : (r\cos(\theta+\eta), r\sin(\theta+\eta), t) \in A$.



cioè: $(r\cos\theta, r\sin\theta, t) \in A$ se e solo se la traccia della curva $\varphi : [0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$

$\varphi(\eta) = (r\cos(\theta+\eta), r\sin(\theta+\eta), t)$

è contenuta in A.

Oss. che la traccia di φ è la circonferenza di raggio r e centro $(0,0,t)$ in $\mathbb{R}^3$.

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. f è invariante per rotazioni attorno all'asse z se

(i) Ω è inv. per rot. attorno all'asse z;

(ii) $f \circ G$ non dipende da θ.

La richiesta (ii) dice che, in coordinate cilindriche, f non dipende da θ.

Esempi. (1) $\mathbb{R}^3$ è invariante per rotazioni attorno all'asse z.

(2) Se $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è invariante per rotazioni attorno all'asse z, allora gli insiemi:

$A = \{(x,y,z) : h(x,y,z) = 0\}$

$B = \{(x,y,z) : h(x,y,z) > 0\}$

$C = \{(x,y,z) : h(x,y,z) < 0\}$

sono invarianti per rotazioni attorno all'asse z.

(3) Se A e B sono inv. per rot. att. all'asse z, anche $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ lo sono.

(4) ~~Ω = {(x,y,z) : f(x,y,z) = 0} con f: ℝ³ → ℝ è invar~~ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è inv. per rot. attorno all'asse z $\iff$ $\exists\, h : [0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

$f(x,y,z) = h(x^2+y^2, z) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(5) $\Omega = \{(x,y,z): \ z = x^2+y^2\}$ è invo x rot. att. a z.

(6) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \dfrac{z}{|z|(x^2+y^2)+1}$

è invo x rot. atto a z.

Come mi aiutano le rotazioni nel disegno?

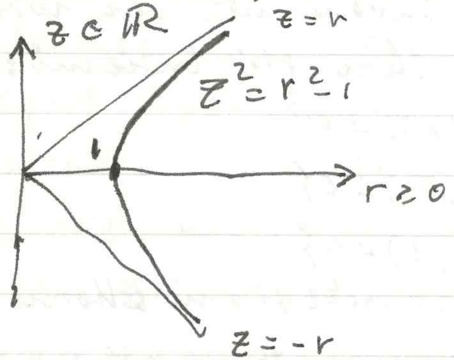
Esempio 1. $\Omega = \{(x,y,z): \ z^2 = x^2+y^2-1\}$

Ω è invo x rot. att. a z: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = t \end{cases}$

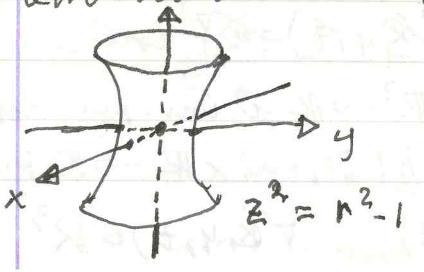
$(x,y,z) \in \Omega \iff z^2 = r^2-1$.

Riporto prima $\{(r,z) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}: z^2 = r^2-1\}$

sul ~~piano~~ (semi)-piano (r,z)

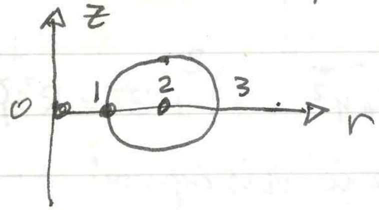


Faccio poi "ruotare" la curva $z^2 = r^2-1$ attorno all'asse z nello spazio (x,y,z).



Ciò corrisponde a considerare, per ogni (r,z) sulla curva, la circonferenza $\theta \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ in $\mathbb{R}^3$.

Esempio 2. Procediamo alla rovescia, considerando prima la curva da ruotare sul piano (r,z).

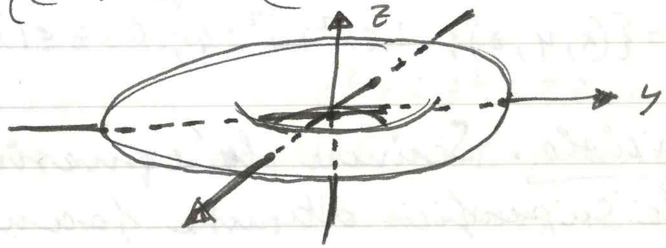


Prendo la circonferenza

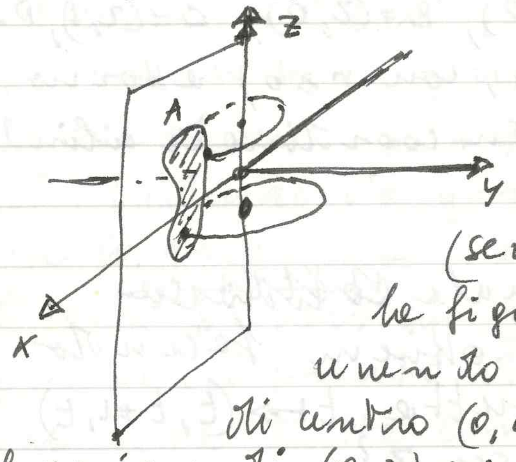
$\Gamma = \{(r,z): (r-2)^2 + z^2 = 1\}$.

Sostituire $r = \sqrt{x^2+y^2}$ equivale a ruotare la circonferenza Γ attorno all'asse z:

$T = \{(x,y,z): \left(\sqrt{x^2+y^2} - 2\right)^2 + z^2 = 1\}$



T è una "ciambella" (un toro).



Più in generale, se A è una figura sul piano (x,z) $[x \geq 0]$ pensato come (semi) piano (r,z), la figura Ω ottenuta unendo tutte le circonferenze di centro $(0,0,z)$ e raggio r al variare di $(r,z) \in A$ è la figura che si ottiene facendo ruotare A attorno all'asse z.

Esempi, Esercizi, Complementi.

(1) Esercizio. Disegnare, al variare di $R \geq 0$,
$$\Omega = \{(x,y,z) : (\sqrt{x^2+y^2} - 1)^2 + z^2 = R^2\}.$$
Sugg. Dovreste trovare disegni qualitativamente diversi per: $R=0$, $0<R<1$, $R=1$, $R>1$.

(2) Esercizio. ~~Trovare~~ Disegnare
$$\Omega = \{(x,y,z) : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4;\ 0 \leq z \leq 1\}$$

(3) Esercizio. Scrivere l'equazione della superficie ottenuta facendo ruotare il quadrato (pieno) con vertici $A=(1,0)$, $B=(2,0)$, $C=(2,1)$, $D=(1,1)$ del piano (r,z), con $r \geq 0$, attorno all'asse z. (In coordinate cilindriche, ovviamente).

(4) Esempio. Quale ~~sottoinsieme~~ superficie si ottiene facendo ruotare la retta $t \mapsto (t, t+1, t)$ attorno all'asse z?

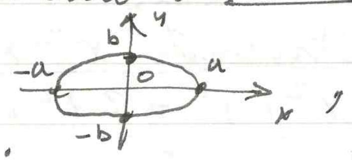
Per ogni punto della retta, calcolo le coordinate r e z.
Se $P = (t, t+1, t)$, con $t \in \mathbb{R}$, allora $r^2 = t^2 + (t+1)^2 = 2t^2+2t+1$
e $z = t$.
Vale quindi la relazione:
$$r^2 = 2z^2+2z+1$$
Sostituendo $r^2 = x^2+y^2$:
$$\boxed{x^2+y^2 = 2z^2+2z+1}$$
è l'equazione cercata.

(5) Esercizio. (i) Verificare che l'equazione $r^2 = 2z^2+2z+1$ in (4) descrive un'iperbole nel piano (r,z); trovarne centro e asintoti e disegnarla.
(ii) Dedurre da (i) quale tipo di quadrica sia quella avente equazione $x^2+y^2 = 2z^2+2z+1$.
(iii) Dedurre da quanto visto sinora che la quadrica $x^2+y^2 = 2z^2+2z+1$ è una superficie rigata: per ogni punto di essa passa una retta tutta contenuta nella superficie. (superfici rigate: superfici curve che si possono costruire con dei tubi).

(iv) Disegnare la quadrica di equazione

$$x^2+y^2 = 2z^2+2z+1.$$

(6) <u>Complemento</u>. <u>Coordinate cilindriche ellittiche</u>. Invece di prendere come "curva di riferimento" la circonferenza $x^2+y^2=1$, consideriamo l'<u>ellisse</u>

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1:$$ 

con $a, b>0$ fissati.

Questa volta, consideriamo la mappa

$$[0,+\infty)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \xrightarrow{H} \mathbb{R}^3$$

$$H(\underline{r},\theta,t)=(\underline{x},y,z): \begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \\ z = t \end{cases},$$

così che $r = r_0$ costante vale per

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2 = r_0^2 \\ z\in\mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow \text{ equazioni di un cilindro a base ellittica}$$

Tutto ciò che abbiamo visto vale, a patto che alle circonferenze con centro sull'asse z si sostituiscano opportune ellissi con centro sull'asse z.

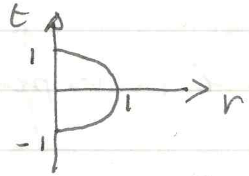
Figure e funzioni collegate ad H si diranno avere <u>simmetria ellittica</u>.

(7) <u>Esempio</u>. Disegnare $\Omega=\{(x,y,z): x^2+4y^2+z^2=1\}$

Pongo $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ 2y = r\sin\theta \\ z = t \end{cases} \longrightarrow$ così che $x^2+4y^2=r^2$

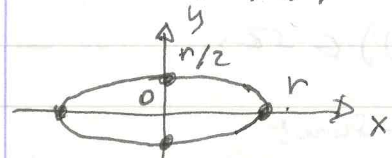
(ho preso quindi $a=1$ e $b=1/2$).

$(x,y,z)\in\Omega \iff (x,y,z) = H(r,\theta,t)$ con $r^2+z^2=1$, $r\geq 0$

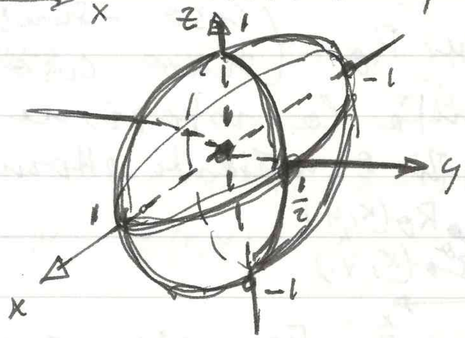


Rimpiazzo ogni punto (r,t) con l'ellisse:

$x^2+4y^2=r^2$ nel piano $z=t$



Posso disegnare Ω:



(<u>Oss</u>. Avrei potuto più comodamente usare coordinate cilindriche normali: $(x=r\cos\theta;\ y=t;\ z=r\sin\theta)$).

(8) <u>Esercizio</u>. Disegnare $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$:

$$\Omega = \{(x,y,z): 4x^2+9y^2 = z^2\}.$$

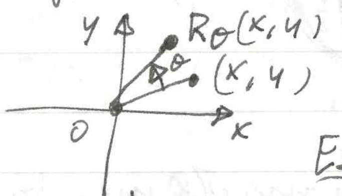
Ancora sulle coordinate polari.

Df. Una ~~funzione~~ insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è invariante per rotazioni (attorno all'origine) se $\forall (x,y) \in \Omega$ e $\forall \theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Omega.$$

Esercizio. Mostrare che Ω è inv. per rotazioni se e solo se $\forall (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \Omega$ e $\forall \theta \in \mathbb{R}$: $(r\cos(\varphi+\theta), r\sin(\varphi+\theta)) \in \Omega$.

Ricordo che $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ rappresenta la rotazione di un angolo di θ radianti attorno all'origine:

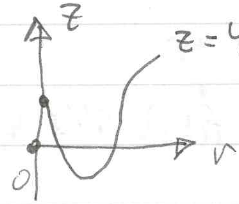


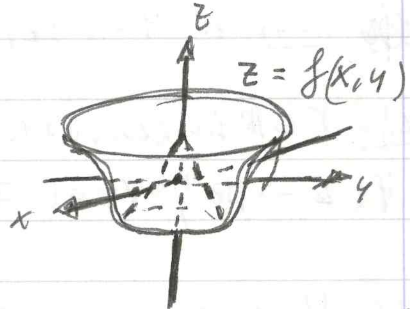
Esercizio. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è inv. per rotazioni $\iff (\forall (x_0,y_0) \in \Omega \Rightarrow$ la circonferenza con centro $(0,0)$ passante per (x_0,y_0) è contenuta in $\Omega)$.

Df. Una funzione $\mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è radiale se (1) Ω è inv. per rotazioni e (2) $f(x,y) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2})$ per qualche

OSS. Il grafico di una funzione f radiale è un sottoinsieme
grafico$(f) \subseteq \mathbb{R}^3$
che è invariante per rotazioni attorno all'asse z in $\mathbb{R}^3$.

$z = f(x,y) = \varphi((x^2+y^2)^{1/2})$

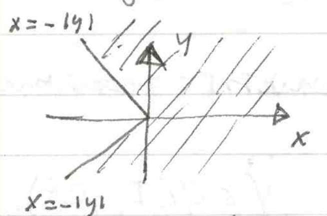




Le coordinate polari servono anche nel caso di insiemi non inv. e funzioni non radiali.

ESEMPIO $[0,+\infty) \times ~~\mathbb{R}~~ \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2 \quad F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y)$.

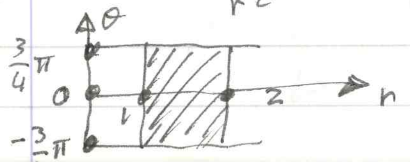
Sia $\Omega = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4;\ x \ge -|y|\}$
e $f : \Omega \to \mathbb{R}$; $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.



Scelgo $\theta \in [-\pi, \pi]$ come arg. principale.

$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \Omega$
$\iff 1 \le r \le 2$ e $-\frac{3}{4}\pi \le \theta \le \frac{3}{4}\pi$

$f(x,y) = \dfrac{r\cos\theta}{r^2} = \dfrac{\cos\theta}{r} = g(r,\theta)$



$\xrightarrow{g} \mathbb{R}$ $\begin{cases} g : [1,2] \times [-\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi] \to \mathbb{R} \\ g(r,\theta) = \dfrac{\cos\theta}{r} \end{cases}$