Curve lisce in $\mathbb{R}^n$.

Def: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$.
φ è derivabile in $t_0 \in I \iff \exists\, \dot{\varphi}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}$ in $\mathbb{R}^n$.

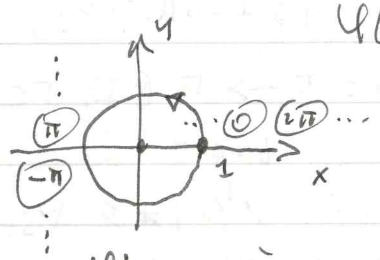
~~Def~~ Oss. Se $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \Rightarrow \dot{\varphi}(t_0) = (\dot{\varphi}_1(t_0), \dots, \dot{\varphi}_n(t_0))$.

Def. $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \iff$
$\varphi : I \to \mathbb{R}^n$; $\forall t \in I\ \exists\, \dot{\varphi}(t)$ e $(t \mapsto \dot{\varphi}(t)) \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$.

Def. Una curva regolare in $\mathbb{R}^n$ è una mappa $I \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo) t.c.
(1) $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$; (2) $\forall t \in I$: $\dot{\varphi}(t) \neq 0$.

Esempi. (1) Sia $f \in C^1(I, \mathbb{R})$, $I \subseteq \mathbb{R}$ interv. e si ponga
$\varphi(t) = (t, f(t))$, $t \in I$
$\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ è una parametrizzazione di grafico$(f) \subseteq \mathbb{R}^2$.
$\dot{\varphi}(t) = (1, \dot{f}(t)) \neq 0$ $\forall t \in I$ e $\dot{\varphi} \in C^0(I, \mathbb{R}^2)$.
Quindi, φ è una curva regolare in $\mathbb{R}^2$.
(semplice e aperta; esercizio: mostrarlo!)

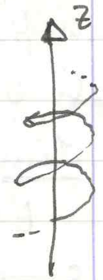
(2) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $\varphi(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$
$\dot{\varphi}(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta) \neq 0$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$.



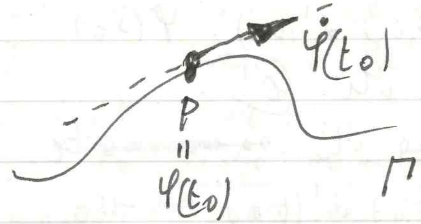
φ è una curva regolare, non semplice.

$\varphi|_{[0, 2\pi]}$ è regolare, semplice, chiusa
$\varphi|_{[0, \pi]}$ è regolare, semplice, aperta.

(3) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$; $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t)$
$\dot{\varphi}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$
è regolare, semplice, aperta



Def. Sia $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ la traccia di una curva regolare φ e sia $P = \varphi(t_0) \in \Gamma$. La retta tangente a Γ in P è la retta di equazione parametrica
$\mathbb{R} \ni t \mapsto \varphi(t_0) + \dot{\varphi}(t_0) \cdot (t - t_0) \in \mathbb{R}^n$.
(È una retta perché $\dot{\varphi}(t_0) \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$).



Oss. In cinematica, $t \mapsto \varphi(t)$ è la traiettoria di un punto, mentre $\dot{\varphi}(t)$ è la sua velocità al tempo t.

Teorema. Sia $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ la traccia di due curve regolari (semplici) φ e ψ; $\varphi: I \to \mathbb{R}^n$; $\psi: J \to \mathbb{R}^n$.

Supponiamo che $\exists\, \alpha: I \to J$ ($I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli) t.c.

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^n \; (P) & \\ \varphi \nearrow & & \uparrow \psi \\ I & \xrightarrow{\alpha} & J \\ (t_0) & & (s_0) \end{array}$$

$\alpha \in C^1(I, \mathbb{R})$; $\alpha'(s) \neq 0 \ \forall s \in I$; $\alpha(I) = J$; $\varphi = \psi \circ \alpha$

Sia $s_0 \in I$ e $P = \varphi(s_0) \in \Gamma$.

Allora: la retta tangente a Γ in P definita usando ψ è la stessa che si ottiene usando φ.

dim. Le due rette sono

(e') $t \mapsto \varphi(t_0) + (t - t_0)\, \dot\varphi(t_0)$ e

(e'') $s \mapsto \cancel{\psi(\alpha(t_0))+}\ \psi(s_0) + (s - s_0)\, \dot\psi(s_0)$

dove $s_0 = \alpha(t_0)$

Per derivate di composizioni:

$$\dot\varphi = (\psi \circ \alpha)^{\cdot} = \dot\psi \circ \alpha \cdot \alpha' \quad \text{(vedi sotto)}$$

quindi $\dot\varphi(t_0) = \dot\psi(\alpha(t_0)) \cdot \alpha'(t_0) = \dot\psi(s_0) \cdot \alpha'(t_0)$.

Ho anche $\varphi(t_0) = \psi(\alpha(t_0)) = \psi(s_0)$, quindi

(e') $t \mapsto \psi(s_0) + (t - t_0)\, \alpha'(t_0) \cdot \dot\psi(s_0)$

è l'equazione di (e').

- Il cambiamento di ~~coordinate~~ parametro $(t - t_0)\, \alpha'(t_0) = s - s_0$;

cioè: $t = \frac{1}{\alpha'(t_0)}(s - s_0) + t_0$;

trasforma l'equazione (e') in (e'') e mostra che le due rette coincidono ■

Nota sulla derivata di composizione

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo; $I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}$;

$J \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n$ (J in $\mathbb{R}$ intervallo; $\alpha(I) \subseteq J$).

Se $t_0 \in I$, $\exists\, \alpha'(t_0) \in \mathbb{R}$ e $\exists\, \dot\psi(\alpha(t_0)) \in \mathbb{R}^n$

allora

$$\exists\, (\psi \circ \alpha)^{\cdot}(t_0) = \dot\psi(\alpha(t_0)) \cdot \alpha'(t_0) \in \mathbb{R}^n.$$

dim. $(\psi \circ \alpha)(t) = \psi(\alpha(t)) = (\psi_1(\alpha(t)), \dots, \psi_n(\alpha(t)))$

$\Rightarrow \exists\, (\psi \circ \alpha)^{\cdot}(t_0) = ((\psi_1 \circ \alpha)^{\cdot}(t_0), \dots, (\psi_n \circ \alpha)^{\cdot}(t_0))$

$= (\dot\psi_1(\alpha(t_0)) \cdot \alpha'(t_0), \dots, \dot\psi_n(\alpha(t_0)) \cdot \alpha'(t_0))$

$= \dot\psi(t_0) \cdot \alpha'(t_0)$ ■

oss. Il Teorema ~~dice~~ dice che se cambio la parametrizzazione di Γ mediante una trasformazione α dei parametri, la retta tangente non cambia.

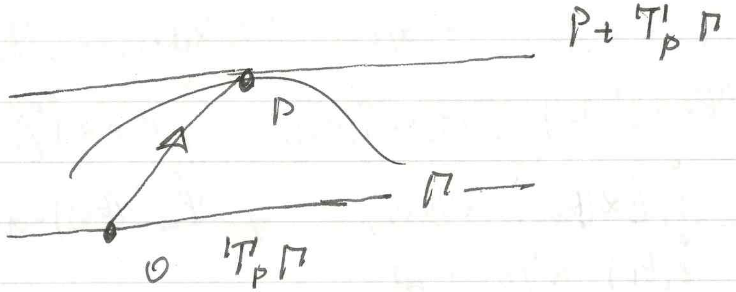
Ciò è una forma "debole" dell'affermazione (vera!!): la retta tangente a Γ in P non dipende dalla particolare parametrizzazione regolare di Γ.

Cioè, la retta tangente a Γ in P è un oggetto geometrico, che si indica

$$P + T_P \Gamma.$$

Def. Sia $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ la traccia di una curva regolare semplice $I \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}^n$ intervallo; $P = \varphi(t_0) \in \Gamma$, $t_0 \in I$.
Lo spazio tangente a Γ in P è $T_P\Gamma = \mathrm{span}\{\dot\varphi(t_0)\}$

OSS. $T_P\Gamma$ è uno sottospazio vettoriale 1-dimensionale di $\mathbb{R}^n$.



Esercizio. Si scrivano le rette e gli spazi tangenti alle tracce delle curve negli esempi (1)-(3), nel punto corrispondente al "tempo" $t = t_0$.

NOTA. In generale è molto difficile descrivere la geometria di insiemi $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (in particolare, le loro proprietà che sono invarianti per parametrizzazioni). È molto più facile perdere di proprietà invarianti per "riparametrizzazione" (cioè, per un cambio di coordinate nella parametrizzazione): una nozione molto più speciale e meno geometrica, a priori.
Le curve fanno eccezione: vedremo che la traccia Γ di una curva ammette delle parametrizzazioni speciali, in cui è racchiusa tutta la geometria di Γ.

Ri-parametrizzazioni:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^n & \\ {\scriptstyle\varphi}\nearrow & & \uparrow{\scriptstyle\psi} \\ I & \xrightarrow[\alpha]{} & J \end{array}$$

Diverse parametrizzazioni:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^n & \\ {\scriptstyle\varphi}\nearrow & & \uparrow{\scriptstyle\psi} \\ I & & J \end{array}$$

φ, ψ curve regolari semplici aperte;

$\varphi(I) = \Gamma = \psi(J)$

Domanda non banale:

$\exists\, I \xrightarrow{\alpha} J$ t.c. $\varphi = \psi \circ \alpha$?

Cioè: una diversa parametrizzazione di Γ è per forza data da un cambiamento di coordinate in una param. fissata?