Equazioni differenziali

(1) Trovare le soluzioni non prolungabili di

(1.1) $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{t}{\sin x} \\ x(0) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ (1.2) $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\sin t}{x} \\ x\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$ (1.3) $\begin{cases} \dot{x} = e^{x+t} \\ x(0) = 0 \end{cases}$

(2) Trovare l'integrale generale di

$$\dot{x} + \cos t \cdot x = 3 \cdot \cos t$$

e la soluzione di $\begin{cases} \dot{x} + \cos t \cdot x = 3 \cdot \cos t \\ x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e \end{cases}$

(3) Trovare l'integrale generale di

(E0) $\ddot{x} + 4x = 0$.

Tra tutte le soluzioni di (E0), trovare quelle che soddisfano $x(0) = 0$ e verificare che esse soddisfano anche $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Risolvere $\begin{cases} \ddot{x} + 4x = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$

(4) Trovare le soluzioni non prolungabili di

$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+t} \\ x(0) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x \cdot t} \\ x(-1) = -4 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x} = (x^2-1)(t^2-1) \\ x(1) = -1 \end{cases}$

$\underbrace{\begin{cases} \dot{x} = (x^2-1)(t^2-1) \\ x(1) = -2 \end{cases}}$ $\begin{cases} \dot{x} = x^3 t \\ x(1) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x} = (x+1)(t-1) \\ x(1) = -1 \end{cases}$

~~senza dominio~~

Senza dominio

Soluzioni e svolgimenti

(1.1) $\sin x \cdot dx = t\,dt \iff \int_{\pi/4}^{x(t)} \sin x\, dx \overset{\bullet}{=} \int_0^t s\,ds = \left(\frac{s^2}{2}\right)_0^t = \frac{t^2}{2}$

$$= \left(-\cos(x)\right)_{\frac{\pi}{4}}^{x(t)} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos(x(t)) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos(x(t))$$

$\iff \cos(x(t)) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{t^2}{2}$: devo avere $-1 < \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{t^2}{2} < 1$

$$\boxed{\begin{gathered} x(t) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{t^2}{2}\right) \\ -\sqrt{2+\sqrt{2}} < t < \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{gathered}}$$

$$\underbrace{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)}_{\text{è già negativo!}} < t^2 < 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(1.2) $x \cdot \dot{x} = \sin t \iff \int_{\frac{\pi}{4}} x\,\dot{x}\,ds \overset{\bullet}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{t} \sin s \cdot ds = \left(-\cos(s)\right)_{\pi/4}^{t}$

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)_1^{x(t)} = \int_1^{x(t)} x\,dx = \int_{x\left(\frac{\pi}{4}\right)}^{x(t)} x\,dx$$

$$\left(-\cos(s)\right)_{\pi/4}^{t} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos t = \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos t$$

$\frac{x(t)^2 - 1}{2} \iff x(t)^2 = \sqrt{2} - 2\cos(t) + 1 = \left[\frac{1+\sqrt{2}}{2} - \cos(t)\right] \cdot 2$

Posso avere $x(t) = \pm\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2} - \cos(t)}$.

per scegliere considero che $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 > 0$, quindi

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2} - \cos(t)} \\ x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{cases}$$

~~(1.3)~~ $\cancel{\dot{x} = e^{x+t} = e^x \cdot e^t \iff e^{-x} \cdot \dot{x} = e^t \iff \int_0 e^{-x(s)} \dot{x}(s)\,ds \overset{\bullet}{=} \int_0 e^{-s}\,ds}$

$$\cancel{1 - e^{-x(t)} = \left(-e^{-x}\right)_0^{x(t)} = \int_0^{x(t)} e^{-x}\,dx = \int_{x(0)}^{x(t)} e^{-x}\,dx \qquad \left(-e^{-s}\right)_0^t = 1 - e^{-t}}$$

$$\cancel{\iff e^{-x(t)} = e^{-t}}$$

$$\cancel{\iff \begin{cases} x(t) = t \\ x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{cases}}$$

(2) $\dot{x} + \cos t \cdot x = 3 \cdot \cos t$ $\qquad \int \cos t \, dt = \sin t$ è una primitiva di $\cos t$:

$$e^{\sin t} \cdot \dot{x} + e^{\sin t} \cdot \cos t \cdot x = 3 \cdot \cos t \cdot e^{\sin t} = 3 \cdot \left(e^{\sin t}\right)^{\circ}$$

$$\overset{\shortparallel}{\left(e^{\sin t} \cdot x\right)^{\circ}} \iff e^{\sin t} x(t) = 3 e^{\sin t} + c$$

$$\iff \begin{cases} x(t) = 3 + c \cdot e^{-\sin t} & c \in \mathbb{R} \\ x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{cases}$$

è l'integrale generale.

La condizione iniziale è

$$e = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 + c \cdot e^{-\sin(\pi/2)} = 3 + c \cdot e^{-1},$$

cioè $c = (e - 3) \cdot e = e^2 - 3e$:

$$\begin{cases} x(t) = 3 + (e^2 - 3e) \cdot e^{-\sin t} \\ x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{cases}$$

è la soluzione del problema di Cauchy

(3) $\ddot{x} + 4x = 0$: lineare, del II ordine, omogenea.

$x(t) = e^{\lambda t}$: $\dot{x}(t) = \lambda \cdot e^{\lambda t}$; $\ddot{x}(t) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$

$0 = \lambda^2 e^{\lambda t} + 4 \cdot e^{\lambda t} = (\lambda^2 + 4) \cdot e^{\lambda t} \iff \lambda^2 + 4 = 0 \iff \lambda^2 = -4$

$\iff \lambda = \pm 2i$: l'integrale generale è

$$\boxed{x(t) = A \cdot \cos(2t) + B \cdot \sin(2t), \; x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (A, B \in \mathbb{R}).}$$

$0 = x(0) = A \iff A = 0$: $\boxed{x(t) = B \cdot \sin(2t)}$ sono le soluzioni con $x(0) = 0$.

Chiaramente, $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = B \cdot \sin(\pi) = 0$!

Quanto al problema di Cauchy,

$\ddot{x} + 4x = 0 \iff x(t) = A \cdot \cos(2t) + B \sin(2t) = 0$

So già che $x(0) = 0 \iff x(t) = B \cdot \sin(2t)$

$\implies \dot{x}(t) = 2B \cdot \cos(2t)$

$1 = \dot{x}(0) = 2B \iff B = 1/2$: $\boxed{x(t) = 1/2 \sin(2t)}$ è la soluzione

(103) $\dot{x} = e^{x} \cdot e^{t} \iff e^{-x} \cdot \dot{x} = e^{t}$

$$\iff \int_{0}^{t} e^{-x(s)} \dot{x}(s)\, ds = \int_{x(0)=0}^{x(t)} e^{-x}\, dx = \left(-e^{-x}\right)_{0}^{x(t)} = 1 - e^{-x(t)}$$

$$\parallel$$

$$\int_{0}^{t} e^{s}\, ds = \left(e^{s}\right)_{0}^{t} = e^{t} - 1$$

$$\iff e^{-x(t)} = 2 - e^{t} \iff x(t) = \log \frac{1}{2 - e^{t}}$$

Soluzione: $\boxed{x(t) = \log \frac{1}{2 - e^{t}}}$

Dominio: $2 - e^{t} > 0$; $t < \log 2$: $\boxed{(-\infty, \log 2)}$

(4) (A) $$\int_{0}^{t} e^{-x(s)} \dot{x}(s)\, ds = \int_{x(0)=1}^{x(t)} e^{-x}\, dx = \left(-e^{-x}\right)_{1}^{x(t)} = e^{-1} - e^{-x(t)}$$

$$\parallel$$

$$e^{t} - 1 \iff e^{-x(t)} = e^{-1} + 1 - e^{t}$$

$$\boxed{x(t) = \log \frac{1}{e^{-1} + 1 - e^{t}}\ ;\ x : \left(-\infty, \log(1 + e^{-1})\right) \to \mathbb{R}}$$

(B) $\dot{x} = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-t}$ (occhio ai segni in $x(-1) = -4$!)

$$\iff \frac{\dot{x}}{\sqrt{-x}} = \sqrt{-t} \iff \int_{-1}^{t} \frac{\dot{x}(s)}{\sqrt{-x(s)}}\, ds = \int_{x(-1)=-4}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{-x}} = \left[(-x)^{1/2}(-2)\right]_{-4}^{x(t)}$$

$$\int_{-1}^{t} \sqrt{-s}\, ds = \left(-\frac{2}{3}(-s)^{3/2}\right)_{-1}^{t} = -\frac{2}{3}(-t)^{3/2} + \frac{2}{3}$$

$$\left(-x(t)\right)^{1/2}(-2) + 4^{1/2} \cdot 2 = 4 - 2\sqrt{-x(t)}$$

$$\iff \sqrt{-x(t)} = 2 - \frac{1}{3} + (-t)^{3/2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}(-t)^{3/2}$$

Quindi $\boxed{x(t) = -\frac{1}{9}\left[5 + (-t)^{3/2}\right]^{2}\ ;\ x : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}}$

(4) (1) $\begin{cases} \dot{x} = (x^2-1)(t^2-1) \\ x(1) = -2 \end{cases}$ $\qquad \dfrac{\dot{x}}{x^2-1} = t^2-1$

$$\int_1^t \frac{\dot{x}(s)\,ds}{x(s)^2-1} = \int_1^t (1-s^2)\,ds = \left(s - \frac{s^3}{3}\right)_1^t = -\frac{2}{3} + t - \frac{t^3}{3}$$

$$\int_{x(1)=-2}^{x(t)} \frac{dx}{x^2-1} = \int_{-2}^{x(t)} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log|x-1| - \log|x+1|\right)_{-2}^{x(t)} = \left(\frac{1}{2}\log\frac{|x-1|}{|x+1|}\right)_{-2}^{x(t)}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x(t)-1}{x(t)+1}\right| - \frac{1}{2}\log 3$$

$$\Leftrightarrow \log\left|\frac{x(t)-1}{x(t)+1}\right| = \log 3 - \frac{4}{3} + 2t - \frac{2}{3}t^3$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{x(t)-1}{x(t)+1}\right| = 3\cdot e^{-\frac{4}{3}+2t-\frac{2}{3}t^3}$$

Poiché $\dfrac{x(1)-1}{x(1)+1} = \dfrac{-3}{-1} = 3 > 0$,

$$\frac{x(t)-1}{x(t)+1} = 3\cdot e^{-4/3+2t-2/3\,t^3}$$

Risolvo $\dfrac{y-1}{y+1} = a$ $\qquad y-1 = ay+a$

$y(1-a) = a+1$

$y = \dfrac{a+1}{1-a}$

$$\boxed{x(t) = \frac{3\cdot e^{-\frac{4}{3}+2t-\frac{2}{3}t^3}+1}{1-3\cdot e^{-4/3+2t-2/3\,t^3}}}$$

Dominio: l'intervallo massimale in $\{t : \log 3 - 4/3 + 2t - 2/3\, t^3 \neq 0\}$, contenente $t=1$.

(4)(C) $\quad x(t) = -1, \quad x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(4)(E) $\quad \dfrac{\dot{x}}{x^3} = t \iff \displaystyle\int_1^t s\,ds = \frac{t^2 - 1}{2}$

$$\parallel$$

$$\int_1^t \frac{\dot{x}(s)}{x(s)^3}\,ds = \int_{x(1)=1}^{x(t)} \frac{dx}{x^3}$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{x(t)^2} = 2 - t^2 \iff -\frac{1}{2x(t)^2} + \frac{1}{2} = \left(-\frac{x^{-2}}{2}\right)_1^{x(t)}$$

$x(t) = \pm\sqrt{2 - t^2}$

Vista la condizione $x(1) = 1 > 0$, scelgo

$$\boxed{x(t) = \sqrt{2 - t^2}; \quad x : (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \to \mathbb{R}}$$

(4F) $\quad x(t) = -1; \quad x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$