Differenziabilità e derivabilità parziale.

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in \Omega$, $\Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $1 \le j \le n$. f è parzialmente derivabile nella direzione e_j (o rispetto a x_j, se $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$) se

$$\exists \lim_{\substack{h \to 0 \\ \text{in } \mathbb{R}}} \frac{f(x_0 + h e_j) - f(x_0)}{h} = L \in \mathbb{R}.$$

Se il limite esiste, $L = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ è la derivata parziale di f rispetto a x_j in x_0.

Notazioni: $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \partial_{x_j} f = \partial_j f = f_{x_j} = D_j f = D_{x_j} f = \dots$

- f è parzialmente derivabile in Ω se $\forall x \in \Omega \ \forall j = 1, \dots, n \ \ \exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$.
- $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ è di classe C^1 in Ω se è parzialmente derivabile in ~~Ω~~ e se $\frac{\partial f}{\partial x_j} : x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ è continua in Ω per $j = 1, \dots, n$: $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C(\Omega, \mathbb{R})$.

Esempio di funzione parzialmente derivabile in Ω, che non è però nemmeno continua in Ω. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

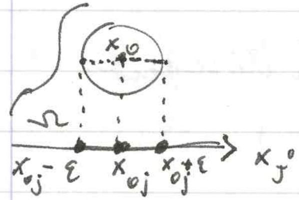
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Sappiamo che f non è continua in 0.
Si calcola $\partial_x f(x,y) = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$;
$\partial_y f(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$; $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$.

Cioè, $\partial_x f$ e $\partial_y f$ sono definite (anche se discontinue) in Ω; pur essendo f discontinua.

oss. Diverse interpretazioni per $\frac{\partial f}{\partial x_j}$.

(1) Pongo $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$,
$\varphi_j(h) = f(x_0 + h e_j)$.
Nota che φ_j è effettivamente definita in (almeno un) intervallo aperto $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $\exists \varepsilon > 0$.
Infatti Ω aperto $\Rightarrow \exists B(x_0, \varepsilon) \subseteq \Omega$ $(\varepsilon > 0)$
$\Rightarrow x_0 + h e_j \in B(x_0, \varepsilon) \subseteq \Omega$ per $|h| < \varepsilon$.



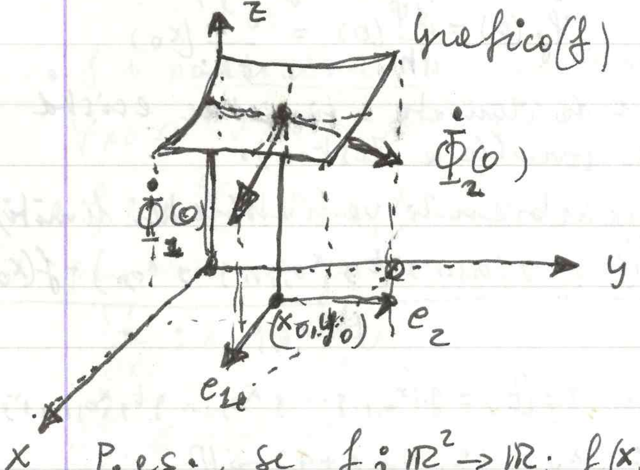
Abbiamo che
$$\dot{\varphi}_j(0) = \frac{d\varphi}{dh}(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$$
(e la derivata a sinistra esiste se e solo se esiste quella a destra).

(2) Ovviamente (cambiando variabili nei limiti)
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \lim_{\substack{t \to x_{0,j} \\ \text{in } \mathbb{R}}} \frac{f(x_{0,1}, \dots, x_{0,j-1}, t, x_{0,j+1}, \dots, x_{0,n}) - f(x_0)}{t - x_{0,j}}$$
$= \dot{\psi}_j(x_{0,j})$, dove $\psi_j(t) = f(x_{0,1}, \dots, x_{0,j-1}, t, x_{0,j+1}, \dots, x_{0,n})$
$\psi_j : (x_{0,j} - \varepsilon, x_{0,j} + \varepsilon) \to \mathbb{R}$

(3) Operativamente, si considera f come funzione della sola variabile x_j, "congelando" tutte le altre. Vediamo l'esempio di prima:
$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$.
Fisso y. Se $y \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$: $\partial_x f(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2}$
Se $y = 0$, allora $f(x,0) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \partial_x f(x,0) = 0$.

(4) Sia $\text{grafico}(f) = \{(x, f(x)) : x \in \Omega\} \subseteq \Omega \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.
Possiamo considerare curve con valori nel grafico di f, $\Phi : (-\varepsilon, +\varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$
$$\Phi_j(t) = (x_0 + t e_j ; f(x_0 + t e_j)).$$
Allora, $\exists\, \dot{\Phi}_j(0) = \left(e_j ; \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\right) \in \mathbb{R}^{n+1}$
$\iff \exists\, \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \in \mathbb{R}$:
il vettore tangente a Φ_j in $t=0$ ha come prime n componenti quelle di e_j e come $(n+1)$-componente ha $\partial_j f(x_0)$.

Nel caso $n=2$, si può fare un disegno:



P. es., se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x,y) = e^{-x^2 - 4y^2}$,
allora $\text{grafico}(f) = \{(x, y, e^{-x^2-4y^2}) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$
e se considero il punto $(1, 1/2) \in \mathbb{R}^2$,
$\partial_x f(1, 1/2) = -2e^{-2}$; $\partial_y f(1, 1/2) = -4e^{-2}$
e il vettore tangente ~~alla~~ a
$x \mapsto (x, 1/2, f(x, 1/2))$ in $x=1$ è $(1, 0, -2 \cdot e^{-2})$,
mentre quello tangente a
$y \mapsto (1, y, f(1,y))$ in $y = 1/2$ è $(0, 1, -4 \cdot e^{-2})$.

- Essendo, di fatto, derivate di una funzione di una variabile reale, le derivate parziali soddisfano le normali regole algebriche di derivazione. ~~In sintesi~~

<u>Proposizione.</u> Siano $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$; $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto; $x_0 \in \Omega$ e $1 \le j \le n$ e supponiamo che $\exists\, \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ e $\exists\, \frac{\partial g}{\partial x_j}(x_0)$. Allora,

- $\exists\, \frac{\partial}{\partial x_j}(f+g)(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) + \frac{\partial g}{\partial x_j}(x_0)$
- $\exists\, \frac{\partial}{\partial x_j}(f \cdot g)(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$
- Se $\alpha \in \mathbb{R}$, $\exists\, \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha f)(x_0) = \alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$
- Se $g(x_0) \neq 0$ ~~nullare~~ in Ω, allora
$$\exists\, \frac{\partial}{\partial x_j}(f/g)(x_0) = \frac{\partial_{x_j} f(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot \partial_{x_j} g(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Per le composizioni, dobbiamo accontentarci per ora di:

<u>Proposizione.</u> Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$; $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in \Omega$ e $1 \le j \le n$ e $\exists\, \partial_{x_j} f(x_0)$.
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f(\Omega) \subseteq I$ e $\varphi : I \to \mathbb{R}$ e $\exists\, \dot{\varphi}(f(x_0))$. Allora, $\varphi \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ e
$$\exists\, \partial_{x_j}(\varphi \circ f)(x_0) = \dot{\varphi}(f(x_0)) \cdot \partial_{x_j} f(x_0)$$

<u>Oss.</u> Vale banalmente che, se f è costante su $\mathbb{R}^n$, allora $\exists\, \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \;\; \forall 1 \le j \le n$.

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $\Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.
$f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ è di <u>classe C^1</u> su Ω se
$\forall 1 \le j \le n \quad \forall x \in \Omega \ \exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ e le funzioni
$x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ sono continue su Ω $\forall 1 \le j \le n$.

<u>NOTAZIONE</u>: $\nabla f(x_0) = (\partial_{x_1} f(x_0), \dots, \partial_{x_n} f(x_0))$ è il <u>gradiente</u> dif.

<u>Inserto: continuità e parziale derivabilità delle mappe lineari.</u>

(1) <u>Proprietà</u>. Sia $v \in \mathbb{R}^n$ e si definisca
$L_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $L_v(x) = v \cdot x$.
Allora, L_v è continua.
Di più, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$: $|L_v(x_1) - L_v(x_2)| \le \|v\| \cdot \|x_1 - x_2\|$
e $\|v\|$ è la miglior costante per cui la disuguaglianza vale.

<u>dim.</u> Poiché $L_v(x_1) - L_v(x_2) = L_v(x_1 - x_2)$,
basta considerare la disuguaglianza
$|L_v(x)| = |v \cdot x| \le \|v\| \cdot \|x\|$,
che altro non è se non Cauchy-Schwarz.
I casi di uguaglianza li abbiamo già visti. Se $v = 0$, si ha $=$ $\forall x$.
Se $v \ne 0$, si ha $=$ sse x è <u>parallelo</u> a v:
$x = \cancel{\alpha} \frac{v}{\|v\|}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$,
e $L_v(x) = |\alpha| \, \|v\| = \|x\| \cdot \|v\|$ ∎

<u>oss.</u> che la disuguaglianza appena vista è <u>meglio</u> della mera continuità.

(2) Sia $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

La <u>norma di Hilbert-Schmidt</u> di A è
$$\|A\| \stackrel{\text{df.}}{=} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

<u>Proprietà</u>. Sia $\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,
$\Lambda(x) = A \cdot x$
Allora (i) $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$
(ii) quindi, $\|\Lambda(x_2) - \Lambda(x_1)\| \le \|A\| \cdot \|x_2 - x_1\|$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$
(iii) in particolare, $\Lambda \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

<u>dim.</u> È chiaro che (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii), come in (1).
Per mostrare (i), scrivo $A = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix}$ con $a^i \in \mathbb{R}^m$.
Per la def. di Ax, ho che
$$\|Ax\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} a^1 \cdot x \\ a^2 \cdot x \\ \vdots \\ a^n \cdot x \end{pmatrix} \right\|^2 = \sum_{j=1}^n (a^j \cdot x)^2$$
$$\le \sum_{j=1}^n \|a^j\|^2 \, \|x\|^2 \quad \text{per Cauchy-Schwarz}$$
$$= \left(\sum_{j=1}^n \|a^j\|^2 \right) \cdot \|x\|^2 = \|A\|^2 \cdot \|x\|^2$$ ∎

(3) <u>Approfondimento di (2)</u>. $\|A\|$ <u>non</u> è la costante miglior ~~che possiamo~~ con cui (2) (i) vale, in generale.
Considero $n = m = 2$; $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
Allora $\|\Delta\| = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$, mentre $\|\Delta x\|^2 =$
$= \|(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)\|^2 = \lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2 \le$

$\leq \mathrm{MAX}(\lambda_1^2, \lambda_2^2) \cdot (x_1^2 + x_2^2) = \mathrm{MAX}(|\lambda_1|, |\lambda_2|)^2 \cdot \|x\|^2$

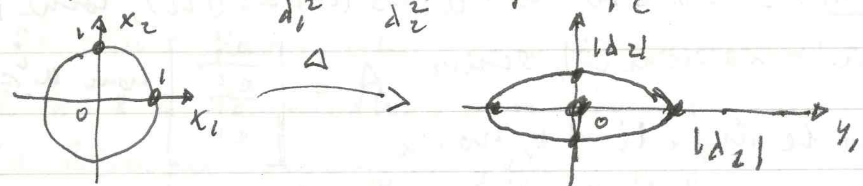
ci dà la miglior costante:

$$|||\Delta||| = \mathrm{MAX}(|\lambda_1|, |\lambda_2|) \leq \|\Delta\| = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{1/2}$$

(per verificare che è la migliore, provare con $x = (x_1, 0)$ o $x = (x_2, 0)$, a seconda che sia $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$ o $|\lambda_2| \geq |\lambda_1|$).

Torniamo sulla <u>norma operatoriale</u> $|||\Delta|||$ e sul suo significato in generale.

Per quanto riguarda Δ in sé, mappa $\partial B(0,1) = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ nell'ellisse $E = \{(y_1, y_2) : \frac{y_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{y_2^2}{\lambda_2^2} = 1\}$



Infatti, $\left.\begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ \text{e } \Delta\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{y_2^2}{\lambda_2^2} = \frac{\lambda_1^2 x_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{\lambda_2^2 x_2^2}{\lambda_2^2} = 1.$

$|||\Delta||| = \mathrm{MAX}(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$ è ~~MAX~~ il <u>semiasse maggiore</u> <u>dell'ellisse</u>, un fatto che vedremo confermato in generale.

• Quanto visto dovrebbe convincerci che le mappe lineari $\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sono un oggetto con proprietà particolari, degne di fare da <u>prototipo</u> per le funzioni "lisce".

<u>Fine dell'inserto</u>.