Teorema. Sia $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, $x_0 \in \Omega$. Allora,

$f(x_0+h) - f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot h + \varepsilon(h)$ per $h \in B(0,\delta)$: $\forall h \in B(0,\delta) \Rightarrow x_0 + h \in \Omega$

è $\varepsilon(h)$ è $o(|h|)_{h \to 0}$ in $\mathbb{R}^n$,

$$\frac{|\varepsilon(h)|}{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0 \text{ in } \mathbb{R}^n]{} 0 .$$

Dimensioni: $h \in \mathbb{R}^n$ è un vettore colonna;
$\nabla f(x_0)$ è un vettore riga: $\nabla f(x_0)^T \in \mathbb{R}^n$;
$\nabla f(x_0) \cdot h \in \mathbb{R}$ e, infatti, $f(x_0+h)$, $f(x_0)$, $\varepsilon(h) \in \mathbb{R}$.

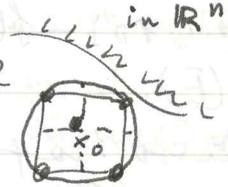
Corollario. $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}) \Rightarrow f \in C(\Omega, \mathbb{R})$.

Dim. $|f(x_0+h) - f(x_0)| = |\nabla f(x_0) \cdot h + \varepsilon(h)|$

$\leq \|\nabla f(x_0)\| \cdot \|h\| + |\varepsilon(h)|$

$= [\|\nabla f(x_0)\| + |\varepsilon(h)| / \|h\|] \cdot \|h\| \xrightarrow[h \to 0 \text{ in } \mathbb{R}^n]{} 0$ ∎

Dim. del Teorema. $(n=2)$ Ω



Passo preparatorio:

$z_0 := (x_0, y_0) \in \Omega \Rightarrow \exists \delta > 0$:

$B(z_0, \delta) \subseteq \Omega \Rightarrow |x_1 - x_0| \leq \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, $|x_2 - y_0| \leq \frac{\delta}{\sqrt{2}}$,

allora $(x_1 - x_0)^2 + (x_2 - y_0)^2 \leq \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^2}{2} = \delta^2$,

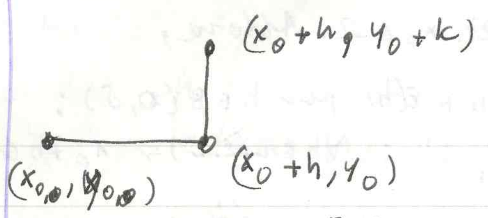
cioè: il quadrato

$Q(z_0, \delta/\sqrt{2}) = \{x = (x_1, x_2) : |x_1 - x_0| \leq \frac{\delta}{\sqrt{2}}, |x_2 - y_0| \leq \frac{\delta}{\sqrt{2}}\}$

è contenuto in $B(z_0, \delta)$, quindi in Ω.

Il conto. Consideriamo $(h,k) \in \mathbb{R}^2$:

$|h|, |k| \leq \delta/\sqrt{2}$.



Scriviamo: $\{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)\}$

(1) $= \{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)\} + \{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)\} = I + II.$

Per II, usiamo il Teorema di Lagrange in una variabile applicato a $\varphi(t) = f(t, y_0)$ con t tra x_0 e x_0+h (se $h>0$: $x_0 \le t \le x_0+h$): $\exists\, \xi$ tra x_0 e x_0+h t.c.

(2) $f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0) = \varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi)\cdot h = \partial_x f(\xi, y_0)\cdot h.$

Lo stesso ragionamento applicato a $\psi(s) = f(x_0+h, s)$ ci dà:

(3) $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) = \partial_y f(x_0+h, \bar{s})\cdot k$

per qualche $\bar{s}$ tra y_0 e y_0+k.

Uso l'ipotesi che $\partial_x f$ e $\partial_y f$ sono C^1:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\forall (u,v)$: $\sqrt{u^2+v^2} \le \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |\partial_x f(x_0+u, y_0+v) - \partial_x f(x_0, y_0)| \le \varepsilon$

and $|\partial_y f(x_0+u, y_0+v) - \partial_y f(x_0, y_0)| \le \varepsilon.$

Da (1), (2), (3) ho che

$|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \partial_x f(x_0, y_0)h - \partial_y f(x_0, y_0)\cdot k|$

$= |[\partial_x f(\xi, y_0) - \partial_x f(x_0, y_0)]\cdot h + [\partial_y f(x_0+h, \bar{s}) - \partial_y f(x_0, y_0)]k|$

$\le \varepsilon |h| + \varepsilon |k|$ se $\sqrt{|h|^2+|k|^2} \le \delta$ (quindi $|\xi - x_0| \le \delta$ e $\sqrt{h^2 + (\bar{s}-y_0)^2} \le \delta$)

$\le 2\varepsilon \cdot \sqrt{|h|^2+|k|^2}$

cioè, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\sqrt{|h|^2+|k|^2} \le \delta \Rightarrow$

$$\frac{|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \partial_x f(x_0, y_0)h - \partial_y f(x_0, y_0)k|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$\le \varepsilon$, cioè che

$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \partial_x f(x_0, y_0)h - \partial_y f(x_0, y_0)k = \underset{(h,k)\to(0,0)}{o}\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$ come si voleva dimostrare.

<u>Definizione</u>. Siano $x_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto, e sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$. f è <u>differenziabile</u> in x_0 se $\exists\, v \in \mathbb{R}^n$ t.c.

$f(x_0+h) = f(x_0) + v^T\cdot h + \underset{h\to 0 \text{ in } \mathbb{R}^n}{o(h)}.$

- Il Teorema sulla differenziabilità delle funzioni C^1 ci dice, appunto, che le funzioni C^1 sono differenziabili in ogni punto del loro dominio.

È utile sapere:

Proposizione. Se $x_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto e se f è differenziabile in x_0,

$$f(x_0+h) = f(x_0) + v^T \cdot h + \underset{h\to 0 \text{ in } \mathbb{R}^n}{o(h)},$$

allora f è parzialmente derivabile in x_0 e $v^T = \nabla f(x_0)$.

dim. Scegliamo un $j \in \{1, \dots, n\}$ qualsiasi e ~~sia~~ sia $h = te_j$, $t \in \mathbb{R}$. Allora

$$\frac{f(x_0+te_j) - f(x_0)}{t} = \frac{1}{t} v^T (te_j) + \frac{o(te_j)}{t}$$

$$= \frac{1}{t}(v_1, \dots, v_n)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{o(te_j)}{t} = \frac{t}{t} v_j + \frac{o(te_j)}{t}$$

$$= v_j + \frac{o(te_j)}{t} \underset{\substack{t\to 0 \\ \text{in } \mathbb{R}}}{\longrightarrow} v_j, \text{ poiché}$$

$$\|te_j\| = |t|, \text{ quindi } \frac{o(te_j)}{|t|} \underset{t\to 0 \text{ in } \mathbb{R}}{\longrightarrow} 0$$

per definizione di o-piccolo e per il cambiamento delle variabili nei limiti. Dunque,

$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+te_j) - f(x_0)}{t} = v_j \in \mathbb{R},$$

cioè $\exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = v_j$: f è parzialmente derivabile in x_0 e $\nabla f(x_0) = (v_1, \dots, v_n) = v^T$ ∎

Funzioni C^1 a variabili vettoriali.

Def. Siano $x_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto, e sia $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$.

Diciamo che f è parzialmente derivabile in x_0 se $f_1, \dots, f_m: \Omega \to \mathbb{R}$ sono parzialmente derivabili in x_0 e poniamo

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} f_1(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_j} f_m(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Se $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ è parzialmente derivabile in $x_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto, la matrice jacobiana di f in x_0 è

$J f(x_0) \in M_{m\times n}$;

$$J f(x_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right] = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}$$

Def. Siano $x_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto.
$f = (f_1, \dots, f_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ è <u>di classe C^1</u> su Ω, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, se
$f_1, \dots, f_m \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$.

<u>Corollario</u> (del Teorema sulla differenziabilità delle funzioni C^1).
Sia $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.
Allora,

$$(*) \quad f(x_0+h) = f(x_0) + Jf(x_0)\cdot h + \underset{h \to 0 \text{ in } \mathbb{R}^n}{o(h)}$$

<u>oss.</u> nella formula qui sopra, tutti gli addendi sono elementi di $\mathbb{R}^m$:

$$\underbrace{f(x_0+h),\ f(x_0)}_{\text{perché } f:\Omega\to\mathbb{R}^m},\ \underbrace{Jf(x_0)\cdot h}_{\text{perché}},\ o(h) \in \mathbb{R}^m.$$

perché $\underset{m \times n}{[\ \ ]} \cdot \underset{n \times 1}{[\ ]} = \underset{m \times 1}{[\ ]}$

questo termine è una funzione che soddisfa

$$\lim_{h \to 0 \text{ in } \mathbb{R}^n} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

- La formula $(*)$ equivale ad affermare che $\forall j \in \{1, \dots, m\}$:

$$f_j(x_0+h) = f_j(x_0) + \nabla f_j(x_0)\cdot h + \underset{h \to 0 \text{ in } \mathbb{R}^n}{o_j(h)},$$

dove abbiamo m diversi "o piccoli" $o_1, \dots, o_m$.

Def. Siano $x_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto, e $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Il <u>differenziale</u> <u>di f in x_0</u> è la mappa lineare

$$d_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$h \longmapsto d_{x_0}(h) := Jf(x_0)\cdot h.$$

<u>Richiamo</u>: una mappa $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è <u>lineare</u> se $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$:

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v).$$

Per ogni mappa lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ esiste ed è unica la matrice $A \in M_{m \times n}$ tale che $\forall v \in \mathbb{R}^n$: $L(v) = A \cdot v$.

- Avendo definito il differenziale, la <u>formula di Taylor al I ordine</u> $(*)$ si può scrivere:

$$(**) \quad f(x_0+h) - f(x_0) = d_{x_0} f(h) + \underset{h \to 0 \text{ in } \mathbb{R}^n}{o(h)}.$$

$*$