Casi speciali

(1) $m=1$ ~~Allora~~ $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
e $\quad Jf(x_0) = \nabla f(x_0)$

(2) $n=1$ $\quad \Omega = I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo,
$f \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ è una curva in $\mathbb{R}^m$
e $\quad Jf(t) = \dot{f}(t) = \begin{pmatrix} \dot{f}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{f}_m(t) \end{pmatrix}$
è la velocità di f in $t \in I \subseteq \mathbb{R}$.

(3) $n=m$ $\quad f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.
Questo caso è particolarmente importante (cambiamento di coordinate; deformazione di un solido $-n=3-$ o di una superficie $-n=2$).
Se $x_0 \in \Omega$, $Jf(x_0) \in M_{n \times n}$ e possiamo parlare di determinante e di matrice inversa di $Jf(x_0)$ (incontreremo entrambi in seguito).

(4) $n=2, m=1$ $\quad f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto.
Sia $(x_0, y_0) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Il piano tangente al grafico di f nel punto di coordinate (del piano ξ) (x_0, y_0) è il piano
$\Pi_{(x_0,y_0)} f = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :$

$$(\square) \quad z - f(x_0,y_0) = \partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0) \}$$

Osservazioni.

(4.1) $(\square)$ è l'equazione di un piano in $\mathbb{R}^3$: è un'equazione lineare non degenere (il coefficiente di z è $1 \neq 0$) nelle variabili x, y, z.

(4.2) Il piano $\Pi_{(x_0,y_0)} f$ passa per il punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0)) \in \text{grafico}(f)$.

(4.3) Il piano $\Pi_{(x_0,y_0)} f$ contiene le rette tangenti alle curve
$t \longmapsto \Phi(t) = (t, y_0, f(t, y_0))$ in $t = x_0$
e $s \longmapsto \Psi(s) = (x_0, s, f(x_0, s))$ in $s = y_0$.
Verifica: $\dot{\Phi}(x_0) = (1, 0, \partial_x f(x_0,y_0))$
e la retta tangente a Φ in x_0 è
$$x \longmapsto \Phi(x_0) + \dot{\Phi}(x_0) \cdot (x - x_0)$$
$$= (x_0, y_0, f(x_0,y_0)) + (x-x_0, 0, \partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0))$$
$$= (x, y_0, f(x_0,y_0) + \partial_x f(x_0,y_0) \cdot (x-x_0))$$

Si verifica immediatamente che si tratta della retta dei punti aventi coordinate (x, y, z) che soddisfano:

$$\begin{cases} z - f(x_0,y_0) = \partial_x f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) & \text{(I)} \\ y = y_0 \; ; & \text{(II)} \end{cases}$$

cioè, dell'intersezione del piano (I) tangente al grafico di f in (x_0,y_0) e del piano (II): $y = y_0$.

Lo stesso discorso vale per la retta tangente a ψ in $s = y_0$, che sarà:

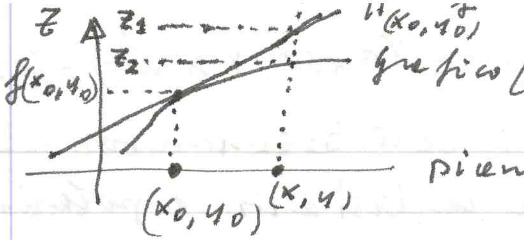
$$\begin{cases} z - f(x_0,y_0) = \partial_x f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) & \text{(I)} \\ x = x_0 . & \text{(III)} \end{cases}$$

Poiché le due rette sono distinte, esse individuano il piano che le contiene.

(4.4) L'equazione di $\Pi_{(x_0,y_0)} f$ si ottiene ~~anche~~ sostituendo nella formula di Taylor al I ordine (*) $f(x,y)$ con z e rimuovendo l'o-piccolo. Meno formalmente, siano

$z_1 = f(x,y)$ e

$z_2 = f(x_0,y_0) - \partial_x f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$.



Allora, $z_1 - z_2 = \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{o}(x-x_0, y-y_0)$.

Cioè, $z_1 - z_2$ è "molto piccolo" rispetto a $\|(x-x_0, y-y_0)\|$, che dà la distanza tra (x,y) e (x_0,y_0).

Si dice anche che l'equazione di $\Pi_{(x_0,y_0)} f$ <u>linearizza</u> quella di f; o che il piano $\Pi_{(x_0,y_0)} f$ <u>linearizza</u> grafico(f) [vicino a (x_0,y_0), ovviamente].

<u>Esempio</u>. Sia $f(x,y) = x\cdot\sin(x^2+y^2)$. Troviamo il piano tangente al grafico di f in $(x_0,y_0) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}, -\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$.

Calcolo: $f_x(x,y) = \sin(x^2+y^2) + 2x^2\cdot\cos(x^2+y^2)$

$f_y(x,y) = 2xy\cdot\cos(x^2+y^2)$

$f\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}, -\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\cdot\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$f_x\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}, -\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \frac{2}{3}\pi\cdot\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3}\pi\cdot\frac{-1}{2}$

$f_y\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}, -\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) = -\frac{2\pi}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi/3$.

• $z - \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\left(x - \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) + \frac{\pi}{3}\left(y + \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$ è l'equazione cercata.

Esempio. Sia $F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y)$,
$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, il cambiamento di coordinate da cartesiane a polari. Calcolare $JF(r,\theta) = J\begin{pmatrix} x & y \\ r & \theta \end{pmatrix}$.

Si ha $JF(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$.

Oss. che $\det(JF(r,\theta)) = r$:
si ha "degenerazione" $\iff r = 0$
(qualcosa di non invertibile).

Esempio. Sia $A \in M_{m\times n}$ e sia
$L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L(x) = Ax = y$.

Allora, $JL(x) = A \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n !)$.

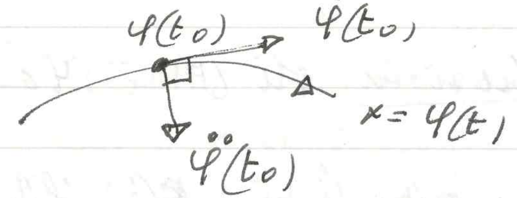
Esercizio. Verificate che, se $A \in M_{m\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$ e $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è data da
$\varphi(x) = Ax + b$,
allora $J\varphi(x) = A \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Esempio / Esercizio. Sia $A \in M_{n\times n}$ una matrice simmetrica, $A = A^T$, e si definisce la forma quadratica,
$Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $Q(x) = \underbrace{x^T A x}_{\text{prodotto di matrici}} = \underbrace{x \bullet (Ax)}_{\text{prodotto scalare}}$

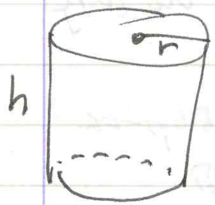
Mostrare che $\boxed{\nabla Q(x) = 2\, x^T A}$ (vettore riga!).

Esempio. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ una curva.
Mostrare che
$$\frac{d}{dt} \|\dot\varphi(t)\|^2 = 2\,\dot\varphi(t) \bullet \ddot\varphi(t)$$

Esercizio: Dedurre che ~~una~~ in una traiettoria con velocità scalare costante si ha che l'accelerazione è perpendicolare alla traiettoria.



Esempio: come varia la superficie laterale di un cilindro al variare di altezza e raggio della base?



$$S = \pi r^2 + 2\pi r.h \quad (r \geq 0, h > 0).$$

$$\frac{\partial S}{\partial r}(r,h) = 2\pi(r+h)$$

$$\frac{\partial S}{\partial h}(r,h) = 2\pi r$$

Esercizio: S aumenta di più aumentando di 1 il raggio r o aumentando di 1 l'altezza h?