Equazioni differenziali lineari ordinarie del II ordine.

Def. Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo; $b, c, f \in C(I, \mathbb{R})$ e consideriamo l'equazione differenziale lineare ordinaria del II ordine con coefficienti b, c e termine noto f:

$$(E) \qquad \ddot{x} + b(t) \cdot \dot{x} + c(t) \cdot x = f(t)$$

Una soluzione di (E) è $\varphi \in C^2(I, \mathbb{R})$: $\forall t \in I$:

$$\ddot{\varphi}(t) + b(t) \cdot \dot{\varphi}(t) + c(t) \cdot \varphi(t) = f(t).$$

L'integrale generale di (E) è

$$IG(E) = \{\varphi \in C^2(I, \mathbb{R}) : \varphi \text{ è sol. di } (E)\}$$

Def. Siano I, b, c, f come sopra e siano $t_0 \in I$; $x_0, x_0' \in \mathbb{R}$.
Il problema di Cauchy con questi dati è

$$(PC) \begin{cases} (E) & \ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t) = f(t) \\ (CI) & \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = x_0' \end{cases} \end{cases}$$

Una soluzione di (PC) è una soluzione φ di (E) che soddisfa

$$\varphi(t_0) = x_0 \text{ e } \dot{\varphi}(t_0) = x_0',$$

le condizioni iniziali del problema.

Il Teorema che segue è il fondamento di tutta la teoria, ma la dimostrazione eccede i limiti del nostro corso.

Teorema. Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $b, c, f \in C(I, \mathbb{R})$; $t_0 \in I$; $x_0, x_0' \in \mathbb{R}$.
Allora, esiste una soluzione $\varphi \in C^2(I, \mathbb{R})$ ed è unica:
$\forall \psi \in C^2(I, \mathbb{R})$, se ψ è sol. di (PC), allora $\psi = \varphi$;
cioè $\forall t \in I \Rightarrow \psi(t) = \varphi(t)$.

Cerchiamo ora di avere un'idea il più possibile completa di $IG(E)$.
Come preparazione, mettiamo in evidenza la natura di spazio vettoriale di alcune classi di funzioni (un fatto di per sé utile e interessante!).

Consideriamo $C(I,\mathbb{R})$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo.
$C(I,\mathbb{R}) = \{ f : I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è continua in $I \}$.

$\forall f, g \in C(I,\mathbb{R}) : (f+g) : I \to \mathbb{R}$ è definita (come d'uso) da $(f+g)(t) := f(t) + g(t)$ $\forall t \in I$.
$\forall f \in C(I,\mathbb{R})$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha f) : I \to \mathbb{R}$,
$(\alpha f)(t) := \alpha \cdot f(t)$.
Sappiamo che $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in C(I,\mathbb{R}) \Rightarrow$
$f+g$; $\alpha f \in C(I,\mathbb{R})$.

Proprietà. $(C(I,\mathbb{R}); +; \cdot)$ è uno spazio vettoriale (in cui $\mathbb{R}$ svolge il ruolo di campo degli scalari).
Si dimostra questa proprietà verificando le proprietà che definiscono uno spazio vettoriale.

- $\forall f, g, h \in C(I,\mathbb{R}) \Rightarrow (f+g)+h = f+(g+h)$
- $\forall f, g \in C(I,\mathbb{R}) \Rightarrow f+g = g+f$
- $\forall f \in C(I,\mathbb{R}) \Rightarrow f+0 = f$ (0 è la funzione costante nulla su I)
- $\forall f \in C(I,\mathbb{R}) \Rightarrow -f \in C(I,\mathbb{R})$ e $f+(-f)=0$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\forall f \in C(I,\mathbb{R}) \Rightarrow \alpha(\beta f) = (\alpha\beta) f$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\forall f, g \in C(I,\mathbb{R}) \Rightarrow (\alpha+\beta)(f+g) = \alpha f + \alpha g + \beta f + \beta g$
- $\forall f \in C(I,\mathbb{R}) \Rightarrow 1 \cdot f = f$

Nota: in questa discussione non rientra il prodotto di funzioni.
Oss. Allo stesso modo verifichiamo che $C^1(I,\mathbb{R})$, $C^2(I,\mathbb{R})$ e molte altre classi di funzioni ~~è~~ hanno struttura di spazio vettoriale.

NOTA STORICA. Il punto di vista che tratta sistematicamente le funzioni come punti di uno spazio geometrico fu sviluppato alla fine dell'800 da Vito Volterra ed è diventato comune modo di pensare in tutte le scienze e in ingegneria.

Def. Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ continue.
f e g sono linearmente indipendenti se $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \lambda f + \mu g = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0$.
La definizione si estende a una famiglia finita $\{ f_1, \dots, f_n \} \subseteq C(I,\mathbb{R})$, che si dice essere fatta di funzioni linearmente indipendenti se
$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

Esempio. Le funzioni $f(x) = x$ e $g(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ sono linearmente indipendenti:

$$\lambda f + \mu g = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : 0 = \lambda f(x) + \mu g(x)$$
$$= \lambda x + \mu |x| = \begin{cases} (\lambda+\mu) x & \text{se } x \geq 0 \\ (\lambda-\mu) x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu = 0 \\ \lambda-\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0.$$

Due funzioni, cioè, possono essere linearmente indipendenti anche se ~~coincidono~~ su un intervallo.

Esempio: sia $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato.
$\sin(x)$, $\cos(x)$ e $\sin(x+\alpha)$ $(x \in \mathbb{R})$ sono linearmente indipendenti in $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Esempio: dal fatto che, se $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}: a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$$

segue che le funzioni $1, x, x^2, \dots, x^n$ sono linearmente indipendenti in $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, quindi che $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ non ha dimensione finita.
(Se avesse dimensione $n \in \mathbb{N}$, non potremmo trovare $n+1$ vettori lin. ind., come abbiamo appena fatto).

Diciamo che $\boxed{\dim(C(\mathbb{R},\mathbb{R})) = +\infty}$

(Tra l'altro, abbiamo così verificato che se $\mathcal{P}_n(x) \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ è l'insieme dei polinomi di grado al più $n \in \mathbb{N}$, allora $\dim(\mathcal{P}_n(x)) = n+1$).

Teorema. Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $b, c \in C(I,\mathbb{R})$. Consideriamo

$$(E0) \quad \ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t)x = 0$$

Allora:

(I) Integrale generale$(E0) \subseteq C^2(I,\mathbb{R})$ è un sottospazio vettoriale di $C^2(I,\mathbb{R})$.

(II) $\dim(\text{Integrale generale }(E0)) = 2$.

Notazione: IG = Integrale generale.

dim. (I) Siano $\varphi, \psi \in C^2(I,\mathbb{R})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Sia $\chi = \lambda\varphi + \mu\psi$. Allora:

$$(*) \begin{cases} (\lambda\varphi + \mu\psi)^{\circ\circ} + b(t)(\lambda\varphi+\mu\psi)^{\circ} + c(t)(\lambda\varphi+\mu\psi) \\ = \lambda\ddot{\varphi} + \mu\ddot{\psi} + b(t)(\lambda\dot{\varphi} + \mu\dot{\psi}) + c(t)(\lambda\varphi + \mu\psi) \\ = \lambda(\ddot{\varphi} + b(t)\dot{\varphi} + c(t)\varphi) + \mu(\ddot{\psi} + b(t)\dot{\psi} + c(t)\psi). \end{cases}$$

Se φ e ψ sono soluzioni di (E0), allora l'ultima espressione è nulla, quindi $\lambda\varphi + \mu\psi$ è soluzione di (E0).
Cioè: $\varphi, \psi \in IG \Rightarrow \lambda\varphi + \mu\psi \in IG$, che è la definizione di sottospazio vettoriale.

(II) Dimostriamo prima di tutto che $\dim(IG) \geq 2$.

$$(PC_1) \begin{cases} \ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t)x = 0 \\ x(t_0) = 1 \\ \dot{x}(t_0) = 0 \end{cases} \qquad (PC_2) \begin{cases} \ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t)x = 0 \\ x(t_0) = 0 \\ \dot{x}(t_0) = 1 \end{cases}$$

Considero $t_0 \in I$ e i due problemi di Cauchy (PC_1) e (PC_2).

Siano φ_1 le soluzioni di (PC_1) e φ_2 le soluzioni di (PC_2). Mostro che sono linearmente indipendenti ($\Rightarrow \dim(IG) \geq 2$).
Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e supponiamo che

$$\lambda \varphi_1 + \mu \varphi_2 = 0,$$

cioè che

$\forall t \in I: \lambda \varphi_1(t) + \mu \varphi_2(t) = 0.$

Quindi anche:

$\forall t \in I: \lambda \dot{\varphi}_1(t) + \mu \dot{\varphi}_2(t) = 0$

Ponendo $t = t_0$:

$0 = \lambda \varphi_1(t_0) + \mu \varphi_2(t_0) = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 = \lambda$

$0 = \lambda \dot{\varphi}_1(t_0) + \mu \dot{\varphi}_2(t_0) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 = \mu$

cioè, $\lambda = \mu = 0$, come si voleva.

Per mostrare che $\dim(IG) \leq 2$, mi basta verificare che

$$IG \subseteq Lin(\varphi_1, \varphi_2).$$

Sia ora $\varphi \in IG$, cioè

$$\ddot{\varphi} + b(t)\dot{\varphi} + c(t)\varphi = 0;$$

e cerchiamo λ, μ t.c. $\varphi = \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2$, quindi (derivando) che $\dot{\varphi} = \lambda\dot{\varphi}_1 + \mu\dot{\varphi}_2$.

Sostituendo $t = t_0$, quindi, dobbiamo avere

$\varphi(t_0) = \lambda \varphi_1(t_0) + \mu \varphi_2(t_0) = \lambda$

e $\dot{\varphi}(t_0) = \lambda \dot{\varphi}_1(t_0) + \mu \dot{\varphi}_2(t_0) = \mu$.

Poniamo quindi

$$\chi = \varphi(t_0)\varphi_1 + \dot{\varphi}(t_0)\varphi_2 \in C^2(I, \mathbb{R}):$$

(a) χ è soluz. di (E0) per il punto (I);

(b) $\chi(t_0) = \varphi(t_0)\varphi_1(t_0) + \dot{\varphi}(t_0)\varphi_2(t_0) = \varphi(t_0)$

(c) $\dot{\chi}(t_0) = \varphi(t_0)\dot{\varphi}_1(t_0) + \dot{\varphi}(t_0)\dot{\varphi}_2(t_0) = \dot{\varphi}(t_0)$

cioè, χ e φ sono due soluzioni di

$$(PC)\begin{cases} \ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t)x = 0 \\ x(t_0) = \varphi(t_0) \\ \dot{x}(t_0) = \dot{\varphi}(t_0) \end{cases}$$

Per l'unicità delle sol. di (PC), dev'essere $\chi = \varphi$, cioè

$\forall t \in I: \varphi(t) = \chi(t) = \varphi(t_0)\varphi_1(t) + \dot{\varphi}(t_0)\varphi_2(t)$,

quindi $\varphi \in Lin(\varphi_1, \varphi_2)$ come si voleva ∎

<u>Proposizione</u>. Siano $b, c \in C(I, \mathbb{R})$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. Allora

(I) Se $f \in C(I, \mathbb{R})$ e $\varphi \in IG(E)$, $\psi \in IG(E0)$;

(E) $\ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t)x = f(t)$,

(E0) $\ddot{z} + b(t)\dot{z} + c(t)z = 0$;

Allora $\varphi + \psi \in IG(E)$

(II) Viceversa, se $\varphi, \chi \in IG(E)$, allora $\varphi - \chi \in IG(E0)$.