[illegible] vero / falso

(1) Due dei seguenti insiemi sono connessi per archi in $\mathbb{R}$

$$A_1 = \{(x,y,z):\ z^2-(x^2+y^2)=1\}$$

$$A_2 = \{(x,y,z):\ z^2-(x^2+y^2)\geq 1\}$$

$$A_3 = \{(x,y,z):\ z^2-(x^2+y^2)\leq 1\}$$

$$A_4 = \{(x,y,z):\ z^2-(x^2+y^2)=-1\}$$

(2) Quale dei seguenti insiemi è limitato in $\mathbb{R}^2$?

$$A_1 = \{(x,y):\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\geq 1\}$$

$$A_2 = \{(x,y):\ x\geq 0,\ y\leq 0,\ x+y\geq 1\}$$

$$A_3 = \{(x,y):\ x\leq 0,\ y\geq 0,\ x+y\geq 1\}$$

$$A_4 = \{(x,y):\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\}$$

$$A_5 = \{(x,y):\ x\geq 0,\ y\leq 0,\ x+y\leq 1\}$$

$$A_6 = \{(x,y):\ x\leq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\}$$

$$A_7 = \{(x,y):\ x\leq 0,\ y\leq 0,\ x+y\leq 1\}$$

(3) Due dei seguenti insiemi sono connessi per archi in $\mathbb{R}$

$$A_1 = \{(x,y,z):\ |z|\leq \sqrt{x^2+y^2+1}\}$$

$$A_2 = \{(x,y,z):\ |z|\geq \sqrt{x^2+y^2+1}\}$$

$$A_3 = \{(x,y,z):\ |z| = \sqrt{x^2+y^2+1}\}$$

$$A_4 = \{(x,y,z):\ z = \sqrt{x^2+y^2+1}\}$$

(4) Due dei seguenti insiemi sono connessi per archi in $\mathbb{R}$

$$A_1 = \{(x,y,z):\ \sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}} = \sin z\}$$

$$A_2 = \{(x,y,z):\ \sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}} \leq \sin z\}$$

$$A_3 = \{(x,y,z):\ \sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}} \geq \sin z\}$$

$$A_4 = \{(x,y,z):\ \sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}} \leq \sin z;\ 0\leq z\leq \pi\}$$

(5) Siano $\gamma \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ e $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Supponiamo che $\forall t \in \mathbb{R}: \; f(\gamma(t)) = 0$. Quale delle seguenti affermazioni segue dalle ipotesi?

(i) $\forall t \in \mathbb{R}: \; \nabla f(\gamma(t)) \perp \dot{\gamma}(t)$

(ii) $\forall t \in \mathbb{R}: \; \nabla f(\gamma(t)) \parallel \dot{\gamma}(t)$

(iii) $\forall t \in \mathbb{R}: \; \dot{\gamma}(t) = 0$

(iv) f è costante.

(6) Supponiamo che due traiettorie $\gamma, \sigma \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ mantengano una distanza costante pari a 1:

$$\forall t \in \mathbb{R}: \; \| \gamma(t) - \sigma(t) \|^2 = 1.$$

Ne segue una sola delle seguenti:

(i) Le tracce delle traiettorie non s'intersecano:

$$\gamma(\mathbb{R}) \cap \sigma(\mathbb{R}) = \emptyset.$$

(ii) $\forall t \in \mathbb{R}: \; \dot{\gamma}(t) \cdot (\gamma(t) - \sigma(t)) = \dot{\sigma}(t) \cdot (\gamma(t) - \sigma(t))$

(cioè: le proiezioni delle due velocità $\dot{\gamma}(t)$, $\dot{\sigma}(t)$ sul vettore di spostamento tra le due traiettorie coincidono).

(iii) $\forall t \in \mathbb{R}: \; \dot{\gamma}(t) - \dot{\sigma}(t) \parallel \gamma(t) - \sigma(t)$

(iv) $\forall t \in \mathbb{R}: \; \dot{\gamma}(t) \cdot \gamma(t) = \dot{\sigma}(t) \cdot \sigma(t)$

(7) La traiettoria $\gamma = (\alpha, \beta): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ percorre in maniera liscia ($\alpha, \beta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) la parabola $y = \frac{1}{2} x^2$ in $\mathbb{R}^2$ con velocità costante 1 ($\| \dot{\gamma}(t) \| = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$). Quale delle seguenti equazioni differenziali ordinarie soddisfa α? Suppongo $\dot{\alpha} > 0$.

(i) $\dot{\alpha} = \frac{1}{2} \alpha^2$ (ii) $\alpha = \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2$ (iii) $\dot{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$

(iv) $\dot{\alpha} = \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2$

Soluzioni e svolgimenti

(1) In coordinate ~~polari~~ cilindriche $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\theta \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$,

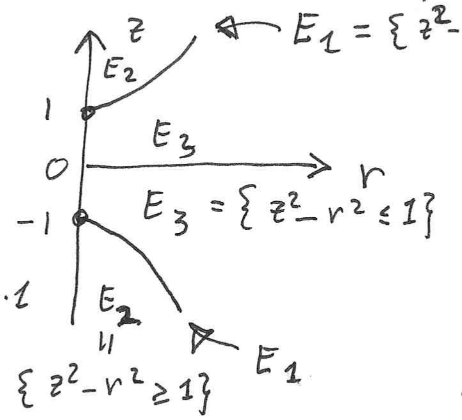
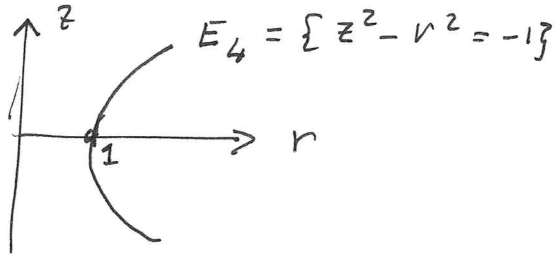


Fig. 1

le regioni A_1, A_2, A_3 si ottengono ruotando attorno all'asse z le regioni E_1, E_2, E_3 del semipiano $\{(r,z) : r \geq 0\}$ indicate in figura 1.

Solo A_3 risulta connesso per archi.

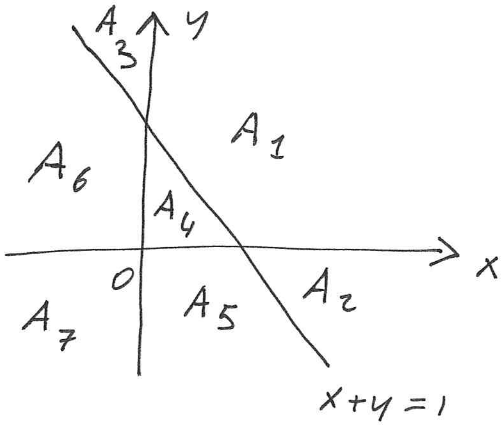
Per quanto riguarda A_4, la figura rilevante è:



per cui A_4 è connesso per archi

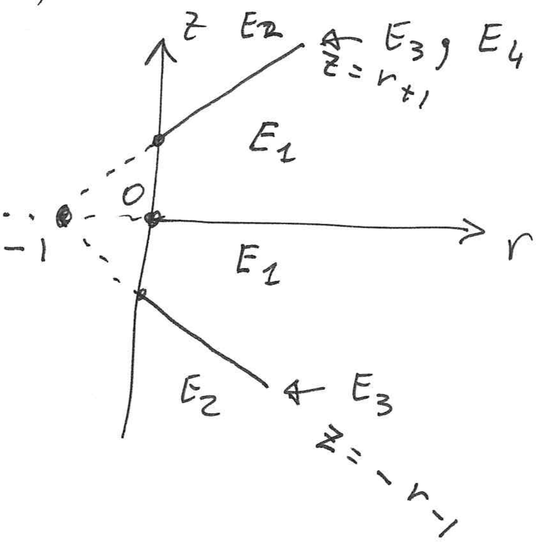
$\boxed{A_3, A_4 \text{ sono connessi per archi}}$

(2)



$\boxed{\text{Solo } A_4 \text{ è limitato}}$

(3) Sempre in coordinate ~~polari~~ cilindriche:



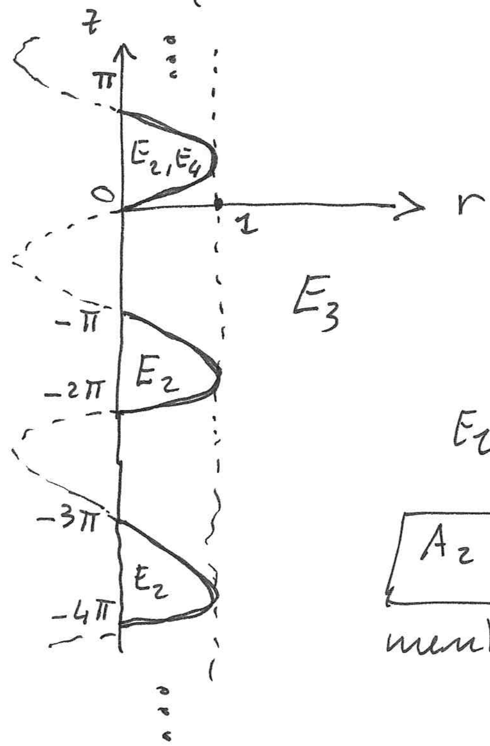
E_1, E_2, E_3, E_4 sono i sottinsiemi che ruotati danno A_1, A_2, A_3, A_4.

$\boxed{A_1 \text{ e } A_4 \text{ sono connessi per archi,}}$

A_2 e A_3 non lo sono.

(4) Meglio usare coordinate cilindriche/ellittiche

$$\begin{cases} x = 2r\cos\theta \\ y = 3r\sin\theta \end{cases} \qquad r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R}.$$



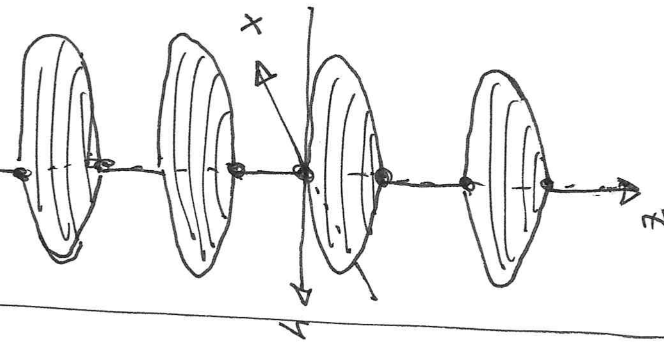
La curva che c'interessa è

$r = \sin z,\ r \geq 0.$

Le curve ci danno E_1 (che ruotata dà A_1), la ~~curva~~ parte con $0 \leq z \leq \pi$ ci dà E_4 (che ruotata diventa A_4), E_1, E_2 danno per rotazione A_2, A_3.

$\boxed{A_2 \text{ e } A_3 \text{ sono connessi per archi,}}$ mentre A_1 e A_2 non lo sono.

Gli insiemi A_2 (solido) e A_2 (superficie) formano uno spiedino attorno allo spiedo z.



(5) $\forall t \in \mathbb{R}: \ f(\gamma(t)) = 0.$

Derivo rispetto a t: $0 = \frac{d}{dt} 0 = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) =$

$= (\nabla f)(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$, cioè $(\nabla f)(\gamma(t)) \perp \dot{\gamma}(t)$ $\boxed{i}$

(6) $\forall t \in \mathbb{R}: \ 1 = \|\gamma(t) - \sigma(t)\|^2 = (\gamma(t) - \sigma(t)) \cdot (\gamma(t) - \sigma(t))$

Derivo rispetto a t:

$$0 = \frac{d}{dt} 1 = \frac{d}{dt}\left[(\gamma(t) - \sigma(t)) \cdot (\gamma(t) - \sigma(t))\right] =$$

$= 2(\dot{\gamma}(t) - \dot{\sigma}(t)) \cdot (\gamma(t) - \sigma(t))$; cioè

$\dot{\gamma}(t) \cdot (\gamma(t) - \sigma(t)) = \dot{\sigma}(t) \cdot (\gamma(t) - \sigma(t))$ $\boxed{ii}$

(7) $\forall t \in \mathbb{R}: \ \beta(t) = \frac{1}{2} \cdot \alpha(t)^2 \Rightarrow \dot{\beta}(t) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \alpha(t) \cdot \dot{\alpha}(t) = \alpha(t) \cdot \dot{\alpha}(t)$

Velocità uniforme: $\dot{\alpha}^2(t) + \dot{\beta}^2(t) = 1$, quindi

$1 = \dot{\alpha}^2 + \alpha^2 \dot{\alpha}^2 = \dot{\alpha}^2(1 + \alpha^2) \Rightarrow$ vale la (iii)

Alcuni esercizi sui limiti.

Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0) \text{ in } \mathbb{R}^2} f(x,y) \in \mathbb{R}$?

(1) $f(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}$

(2) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(4x^2+9y^2)^\alpha}$

(3) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{(|x|+|y|)^\alpha}$

(4) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2+x+y}{(x^2+y^2)^\alpha}$

(5) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{|x|^\alpha}$

(6) $f(x,y) = \dfrac{x^4+x^2y^2+x^2+y^2}{(x^2+y^2)^\alpha}$

(7) $f(x,y) = \dfrac{x^4+x^2y^2+x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^\alpha}$

(8) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+2y^2)}{(x^2+y^2)^\alpha}$

(9) $f(x,y) = \dfrac{x^3y+xy^2+e^{-x^2}\cdot x}{(x^2+y^2+1)^\alpha}$

(10) $f(x,y) = \dfrac{(x,y)\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}}{(x^2+y^2)^\alpha}$

(11) $f(x,y) = \dfrac{(1-\alpha)(x+y)}{(x^2+y^2)^\alpha}$