(1) Trovare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = \sin(2t) + e^{2t} \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

(2) Trovare e classificare i punti critici di

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad f(x,y) = 9x^4 + 4x^2y^2 - 45x^2 - 4y^2 + 3$

(3) Trovare gli $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, per cui

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + x^2 + y^2 + \sin\left(\sqrt{4x^2+9y^2}\right)}{(4x^2+9y^2)^\alpha}$$

(4) Sia f la funzione del punto (2).

Trovare differenziale, piano tangente al grafico e spazio tangente al grafico nel punto di coordinate $(x,y) = (0, \sqrt{3}/2)$.

(5) Siano $\gamma \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tali che

$\forall t \in \mathbb{R}: \quad f(\gamma(t)) = t$.

Quale delle seguenti <u>non segue</u> dalle ipotesi?

(a) $\forall t \in \mathbb{R}: \quad \dot{\gamma}(t) \neq (0,0)$

(b) $\forall t \in \mathbb{R}: \quad (\nabla f)(\gamma(t)) \neq (0,0)$

(c) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2: \quad \nabla f(x,y) \neq (0,0)$

(d) $\forall t \in \mathbb{R}:$ non è vero che $\dot{\gamma}(t) \perp \nabla f(\gamma(t))$

(6) Uno dei seguenti insiemi è connesso per archi in $\mathbb{R}^3$. Trovarlo e farne un disegno approssimativo.

(a) $A_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z^2 \cdot (4x^2 + 9y^2) = 36\}$

(b) $A_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \cdot \sqrt{4x^2 + 9y^2} = 6\}$

(c) $A_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z^2 - (4x^2 + 9y^2) = 36\}$

(d) $A_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z^2 = 36 \cdot (4x^2 + 9y^2) + 1\}$