(3) $\Delta = 0$. Allora $\lambda_1 = \lambda_2 = -b/2$ è l'unica soluzione di (EC), anche se la teoria mi assicura l'esistenza di un'altra soluzione linearmente indipendente da $z(t) = e^{-b/2 t}$.

<u>Procedimento euristico</u> per trovare <u>due soluzioni lin. indip. di (EO)</u> se $\Delta = 0$.

"Perturbo" (EO):

$$(EO(\varepsilon)) \quad \ddot{z} + b\dot{z} + \left(\frac{b^2}{4} - \varepsilon^2\right) z = 0,$$

$$c_\varepsilon = \frac{b^2}{4} - \varepsilon^2 \Rightarrow \Delta_\varepsilon = b^2 - 4c_\varepsilon = 4\varepsilon^2$$

$$(EC(\varepsilon)) \quad \lambda^2 + b\lambda + \frac{b^2}{4} - \varepsilon^2 = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{b}{2} \pm \varepsilon$$

$$z_{1,\varepsilon}(t) = e^{\left(-\frac{b}{2}+\varepsilon\right)t}; \quad z_{2,\varepsilon}(t) = e^{\left(-\frac{b}{2}-\varepsilon\right)t}.$$

Chiaramente,

$$z_{1,\varepsilon}(t) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} e^{-b/2 t}; \quad z_{2,\varepsilon}(t) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} e^{-\frac{b}{2}t}:$$

la distinzione tra le due soluzioni va persa al limite.

Provo con $w_\varepsilon(t) = \dfrac{e^{\left(-\frac{b}{2}+\varepsilon\right)t} - e^{\left(-\frac{b}{2}-\varepsilon\right)t}}{2\varepsilon}$

$$= e^{-\frac{b}{2}t} \cdot \frac{e^{\varepsilon t} - e^{-\varepsilon t}}{2\varepsilon} =$$

$$= e^{-b/2 t} \cdot \frac{(1 + \varepsilon t + o(\varepsilon)) - (1 - \varepsilon t + o(\varepsilon))}{2\varepsilon}$$

$$= e^{-b/2 t} \cdot (t + o(\varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} e^{-\frac{b}{2}t} \cdot t,$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ fissato.

(Ho diviso per 2ε perché ciò mi dà un limite diverso da 0 e da ∞).

<u>Proprietà</u>. $z_1(t) = e^{-b/2 t}$ e $z_2(t) = e^{-b/2 t} \cdot t$ ~~...~~ sono soluzioni linearmente indipendenti di

$$(EO) \quad \ddot{z} + b\dot{z} + cz = 0 \quad \text{se } \Delta = b^2 - 4c = 0.$$

L'integrale generale di (EO) è, in questo caso:

$$IG(EO) \quad z(t) = e^{-\frac{b}{2}t} \cdot (A + Bt).$$

<u>Esercizio</u>. Dimostrare la proprietà.

Diciamo che (EO) presenta il fenomeno della <u>risonanza</u> quando $\Delta = 0$.

Un altro metodo per risolvere il problema della risonanza è variazioni delle costanti arbitrarie.

Consideriamo ancora

(E0) $\ddot{z} + b\cdot\dot{z} + \frac{b^2}{4} z = 0$

Poichè $z_1(t) = e^{-b/2 t}$ è sol. di (E0), ci si può aspettare che un'altra soluz. di (E0), linearmente indipendente da z_1, si possa scrivere nella forma

$$z_2(t) = c(t)\cdot e^{-b/2\, t}$$

(sappiamo che $c(t) \equiv c$, costante, dà delle soluzioni di (E0), che sono però linearmente dipendenti da z_1).

Calcolo: $\dot{z}_2 = \dot{c}(t) e^{-b/2 t} - \frac{b}{2} c(t)\, e^{-b/2 t}$

$\ddot{z}_2(t) = \ddot{c}(t) e^{-b/2 t} - b\cdot\dot{c}(t)\cdot e^{-b/2 t} + \frac{b^2}{4} c(t) e^{-\frac{b}{2}t}$.

Sostituisco in (E0):

$0 = e^{-b/2 t}\cdot\left[\left(\ddot{c} - b\cdot\dot{c} + \frac{b^2}{4}c\right) + b\cdot\left(\dot{c} - \frac{b}{2}\right) + c\,\frac{b^2}{4}\right]$

$= e^{-b/2 t}\cdot \ddot{c}(t) \iff \ddot{c}(t) = 0$

$\iff c(t) = A + Bt$.

Troviamo ancora $(A = 0, B = 1)$:

$z_2(t) = e^{-b/2 t}\cdot t$.

Caso non omogeneo. Consideriamo:

(E) $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t)$.

Il problema consiste ~~ancora~~ nel trovare una soluzione di (E).

In generale, ~~posso posso considerare~~ posso utilizzare il metodo delle variazioni delle costanti arbitrarie. Lo spiego in una forma più generale.

Supponiamo che $z_1 = z_1(t)$ e $z_2 = z_2(t)$ siano una base di soluzioni per

(E0) $\ddot{z} + b(t)\cdot\dot{z} + c(t)\cdot z = 0$,

con $b, c \in C(I, \mathbb{R})$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo; sia $f \in C(I, \mathbb{R})$ e consideriamo

(E) $\ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t)x = f(t)$

Cerco soluzioni di (E) nella forma

$x(t) = A(t) z_1(t) + B(t) z_2(t)$,

con funzioni $A = A(t)$ e $B = B(t)$ da determinare.

$\dot{x}(t) = \left(\dot{A}(t) z_1(t) + \dot{B}(t) z_2(t)\right) + \left(A(t)\dot{z}_1(t) + B(t)\dot{z}_2(t)\right)$

(*) Impongo: $\dot{A}(t) z_1(t) + \dot{B}(t) z_2(t) = 0 \quad \forall t \in I$.

$\Rightarrow \ddot{x}(t) = \left(\dot{A}(t)\dot{z}_1(t) + \dot{B}(t)\dot{z}_2(t)\right) + \left(A(t)\ddot{z}_1(t) + B(t)\ddot{z}_2(t)\right)$

sostituisco in (E):

$f(t) = \ddot{x} + b(t)\,\dot{x} + c(t)\,x$

$= \dot{A}(t)\,\dot{z}_1 + \dot{B}(t)\,\dot{z}_2 + A(t)\,\ddot{z}_1 + B(t)\,\ddot{z}_2$

$+ b(t)\cdot\{A(t)\,\dot{z}_1 + B(t)\,\dot{z}_2\} + c(t)\cdot\{A(t)\,z_1 + B(t)\,z_2\} =$

(**) $= \dot{A}(t)\,\dot{z}_1 + \dot{B}(t)\,\dot{z}_2 +$

$+ A(t)\cdot\{\ddot{z}_1 + b(t)\,\dot{z}_1 + c(t)\,z_1\}$

$+ B(t)\cdot\{\ddot{z}_2 + b(t)\cdot\dot{z}_2 + c(t)\,z_2\}$

$= \dot{A}(t)\cdot\dot{z}_1 + \dot{B}(t)\cdot\dot{z}_2$

Le funzioni $A(t)$, $B(t)$ devono quindi soddisfare:

$$\begin{array}{l} (*) \\ (**) \end{array}\begin{cases} \dot{A}\,z_1 + \dot{B}\,z_2 = 0 \\ \dot{A}\,\dot{z}_1 + \dot{B}\,\dot{z}_2 = f \end{cases} \quad \rightarrow$$

sistema lineare con due equazioni e due incognite.

Risolvo (con Cramer, p. es.):

$$\dot{A} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & z_2 \\ f & \dot{z}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \dot{z}_1 & \dot{z}_2 \end{vmatrix}} = \frac{-z_2\cdot f}{z_1\dot{z}_2 - z_2\dot{z}_1}$$

$$\dot{B} = \frac{\begin{vmatrix} z_1 & 0 \\ \dot{z}_1 & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \dot{z}_1 & \dot{z}_2 \end{vmatrix}} = \frac{z_1\cdot f}{z_1\dot{z}_2 - \dot{z}_1 z_2}$$

Sia ora $t_0 \in I$ fissato. Integrando, ottengo:

$$A(t) = A(t_0) - \int_{t_0}^{t} \frac{f(s)\,z_2(s)}{z_1(s)\cdot\dot{z}_2(s) - z_2(s)\,\dot{z}_1(s)}\,ds$$

$$B(t) = B(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{f(s)\,z_1(s)}{z_1(s)\,\dot{z}_2(s) - z_2(s)\,\dot{z}_1(s)}\,ds$$

e quindi, per $I\,G(E)$:

$$x(t) = A(t_0)\cdot z_1(t) + B(t_0)\cdot z_2(t)$$

$$- z_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{f(s)\,z_2(s)}{z_1(s)\,\dot{z}_2(s) - z_2(s)\,\dot{z}_1(s)}\,ds$$

$$+ z_2(t)\cdot\int_{t_0}^{t} \frac{f(s)\,z_1(s)}{z_1(s)\,\dot{z}_2(s) - z_2(s)\,\dot{z}_1(s)}\,ds.$$

Le costanti $A(t_0)$ e $B(t_0)$, che possono essere scelte a piacere, danno le soluzioni dell'omogenea (E0):

$$Z(t) = A(t_0)\,z_1(t) + B(t_0)\,z_2(t)$$

<u>Nota</u> / <u>Esercizio</u>: verificare che, se z_1 e z_2 sono soluzioni <u>linearmente indipendenti</u> di (E0), allora

$\forall s \in I:\ z_1(s)\,\dot{z}_2(s) - \dot{z}_1(s)\,z_2(s) \neq 0$,

così che gli integrali qui sopra sono ben definiti.

<u>Nota</u>: il metodo funziona se conosciamo $I\,G(E0) = \mathrm{Lin}(z_1, z_2)$.