I prova parziale scritta di Analisi Matematica II
Ingegneria Edile-Architettura, 2010/11

Nome..**Cognome**.. **Matricola**................

(1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^4 - y^4 + \frac{15}{4}x^2y^2 - 4x^2 + y^2 + 11$$

5 pt. Trovare i punti critici di f.

5 pt. Classificare i punti critici di f.

2 pt. Trovare lo sviluppo di Taylor al I ordine di f in $(1,2)$.

2 pt. Determinare l'equazione del *piano tangente* Π al grafico di f nel punto di coordinate $(1,2)$.

2 pt. Determinare l'equazione dello *spazio tangente* V al grafico di f nel punto di coordinate $(1,2)$.

1 pt. Scrivere il *differenziale* di f nel punto di coordinate $(1,2)$.

5 Punti di sella: $(0,0)$; $\pm\left(\frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{241}}, \frac{2\sqrt{68}}{\sqrt{241}}\right)$; $\pm\left(\frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{241}}, -\frac{2\sqrt{68}}{\sqrt{241}}\right)$

2 punti di MAX. rel.: $\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

2 punti di min. rel.: $(\pm\sqrt{2}, 0)$

Taylor I ordine: $f(x,y) = -5 + 26(x-1) + 13(y-2) + o\left(\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\right)$ $(x,y) \to (1,2)$

Piano tangente: $z + 5 = 26(x-1) + 13(y-2)$

Spazio tangente: $z = 26x + 13y$

Differenziale: $d_{(1,2)}f(x,y) = 26x + 13y$

(2) [4 pt.] Siano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1 \text{ o } |y| \le 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y - x - 8| \ge 1\}$, e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Quali delle seguenti affermazioni segue *necessariamente* da queste ipotesi?

- f ha massimo in A.
- Se $f(-10,0) < 0 < f(0,10)$, allora esiste (x,y) in A tale che $f(x,y) = 0$.
- Se $f(10,0) < 0 < f(0,-10)$, allora esiste (x,y) in A tale che $f(x,y) = 0$.
- Se $f(10,0) < 0 < f(0,10)$, allora esiste (x,y) in A tale che $f(x,y) = 0$.

(3) [4 pt.] Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ e siano $\alpha, \beta, \gamma \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Sia

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad h(x,y) = f(\alpha(x,y), \beta(x,y), \gamma(x,y)).$$

Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di h in $(x_0, y_0) = (1, 2)$, sapendo che $(\alpha(x_0,y_0), \beta(x_0,y_0), \gamma(x_0,y_0))$ $(3, 2, 1)$, che

$$\nabla\alpha(x_0,y_0) = (3,2), \ \nabla\beta(x_0,y_0) = (2,1), \ \nabla\gamma(x_0,y_0) = (2,1),$$

che $f(3,2,1) = \pi$ e che $\nabla f(3,2,1) = (-1,-1,1)$.

$$z - \pi = -3(x-1) - 2(y-2)$$

(4) [3 pt.] Trovare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, esiste in $\mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(2x+3y)^4 + (4x^2+9y^2)^2}{(4x^2+9y^2)^\alpha}.$$

$$0 \leq \alpha < 2$$

(5) [5 pt.] Il moto $x = x(t)$ di un punto materiale sulla retta soddisfa l'equazione differenziale (conservazione dell'energia con energia potenziale $V(x) = x^2$):

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + x^2 = E.$$

Trovare la legge del moto supponendo che (i) $\dot{x}(0) > 0$; (ii) $E = 49$, $m = 2$; (iii) $x(0) = \sin(\pi/23)$.

$$x(t) = 7 \cdot \sin\left(t + \arcsin\left(\frac{\sin(\pi/23)}{7}\right)\right)$$

dominio non richiesto, ma facile

$f(x,y) = x^4 - y^4 + \frac{15}{4}x^2y^2 - 4x^2 + y^2 + 11$ **ESERCIZIO N.1**

$\partial_x f(x,y) = 4x^3 + 2\cdot\frac{15}{4}xy^2 - 4\cdot 2x = 2x\left(2x^2 + \frac{15}{4}y^2 - 4\right)$

$\partial_y f(x,y) = -4y^3 + 2\cdot\frac{15}{4}x^2y + 2y = 2y\left(-2y^2 + \frac{15}{4}x^2 + 1\right)$

Punti critici: $\partial_x f(x,y) = 0$ & $\partial_y f(x,y) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x=0 \\ +2y^2 = 1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} 2x^2 = 4 \\ y=0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} 2x^2 + 15/4\, y^2 = 4 \\ 15/4\, x^2 - 2y^2 = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{(0,0) \quad \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \left(\pm\sqrt{2}, 0\right)} \text{ o }$$

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 15/4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 15/4 \\ 15/4 & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-8 + 15/4}{-4 - \left(\frac{15}{4}\right)^2} \\ \\ y^2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 15/4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 15/4 \\ 15/4 & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-2 - 4\cdot 15/4}{-4 - \left(\frac{15}{4}\right)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{16\cdot(32-15)}{16+225}\,\dfrac{1}{4} = \dfrac{4\cdot 17}{241} \\ \\ y^2 = \dfrac{16\cdot(8+60)}{16+225}\,\dfrac{1}{4} = \dfrac{4\cdot 68}{241} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \pm\left(\dfrac{2\sqrt{17}}{\sqrt{241}}, \dfrac{2\sqrt{68}}{\sqrt{241}}\right) \\ \pm\left(\dfrac{2\sqrt{17}}{\sqrt{241}}; \dfrac{-2\sqrt{68}}{\sqrt{241}}\right) \end{array}}$$

Abbiamo in tutto nove punti critici.

$\partial_{xx} f(x,y) = 2\cdot\left(2x^2 + \frac{15}{4}y^2 - 4\right) + 2x\cdot 4x = 2\cdot\left(2x^2 + \frac{15}{4}y^2 - 4\right) + 8x^2$

$\partial_{xy} f(x,y) = 2x\cdot\frac{15}{4}\cdot 2y = 15xy$

$\partial_{yy} f(x,y) = 2\cdot\left(-2y^2 + \frac{15}{4}x^2 + 1\right) + 2y(-4y) = 2\cdot\left(-2y^2 + \frac{15}{4}x^2 + 1\right) - 8y^2$

$\mathrm{Hess} f(0,0) = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (0,0) è p.to di sella

$\mathrm{Hess} f\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{bmatrix} -8 + \frac{15}{4}\cdot\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -8\cdot\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ è def. neg. $\Rightarrow \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ p.ti di MAX rel.

$\mathrm{Hess} f\left(\pm\sqrt{2}, 0\right) = \begin{bmatrix} 8\cdot 2 & 0 \\ 0 & 2\cdot\frac{15}{4}\cdot 2 + 1 \end{bmatrix}$ è def. pos.

$\Rightarrow \left(\pm\sqrt{2}, 0\right)$ p.ti di min. rel.

Usando anche il sistema da cui vengono gli altri punti critici:

$$\mathrm{Hess} f\left(\pm\left(\frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{241}}, \frac{2\sqrt{68}}{\sqrt{241}}\right)\right) = \begin{bmatrix} 8\cdot\dfrac{4\cdot 17}{241} & 15\cdot\dfrac{2\sqrt{17}}{\sqrt{241}}\cdot\dfrac{2\sqrt{68}}{\sqrt{241}} \\ 15\cdot\dfrac{2\sqrt{17}}{\sqrt{241}}\cdot\dfrac{2\sqrt{68}}{\sqrt{241}} & -\dfrac{8\cdot 4\cdot 68}{241} \end{bmatrix}$$

che ha determinante ovviamente negativo, quindi è non definita:

$\pm\left(\frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{241}}, \frac{2\sqrt{68}}{\sqrt{241}}\right)$ e $\pm\left(\frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{241}}, -\frac{2\sqrt{68}}{\sqrt{241}}\right)$ sono punti di selle.

$\nabla f(1,2) = \left(2\cdot(2+15-4),\ 4\left(-8+\frac{15}{4}+1\right)\right) = (26,13) = 13\cdot(2,1)$

$f(1,2) = 1 - 32 + \frac{15}{4}\cdot 4 - 4 + 4 + 11 = -5$

Formula di Taylor I ordine: $f(x,y) = -5 + (26,13)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} + \underset{(x,y)\to(1,2)}{o}\left(\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\right)$

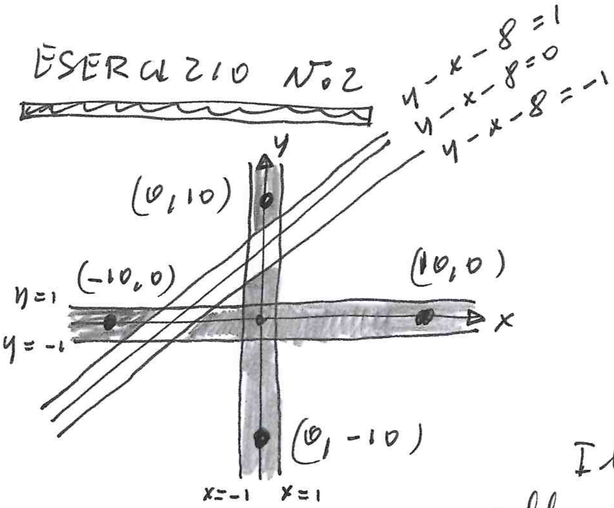
$= -5 + 26(x-1) + 13(y-2) + \underset{(x,y)\to(1,2)}{o}\left(\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\right)$

Piano tangente al grafico di f in $(1,2)$: $\boxed{z+5 = 26(x-1) + 13\cdot(y-2)}$

Spazio tangente al grafico di f in $(1,2)$: $\boxed{z = 26x + 13y}$

Differenziale di f in $(1,2)$: $\boxed{d_{(1,2)} f(x,y) = 26x + 13y}$

ESERCIZIO N.2



L'insieme A è quello ombreggiato: è chiuso, ma non limitato, quindi la funzione potrebbe non avere massimo (p. es. $f(x,y)=x$). Il teorema degli zeri è applicabile alle coppie di punti $(10,0)$, $(0,-10)$:

se $f(10,0) < 0 < f(0,-10)$, allora $\exists (x,y)\in A : f(x,y)=0$.

ESERCIZIO N.3

Sia $f = f(u,v,w)$ e sia $P = (\alpha(x,y), \beta(x,y), \gamma(x,y))$:

$h_x(x,y) = f_u(P)\,\alpha_x(x,y) + f_v(P)\,\beta_x(x,y) + f_w(P)\cdot\gamma_x(x,y)$

$h_y(x,y) = f_u(P)\,\alpha_y(x,y) + f_v(P)\,\beta_y(x,y) + f_w(P)\,\gamma_y(x,y).$

$(x,y) = (1,2) \Rightarrow P = (3,2,1) \Rightarrow \nabla f(P) = (-1,-1,1)$

e $\nabla\alpha(1,2) = (3,2)$, $\nabla\beta(1,2) = (2,1)$, $\nabla\gamma(1,2) = (2,1)$

Quindi $\nabla h(1,2) = (-1,-1,1)\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (-3,-2)$

e $h(1,2) = f(3,2,1) = \pi$,

quindi il piano tangente al grafico di h in $(1,2)$ è

$\boxed{z - \pi = -3(x-1) - 2(y-2)}$

ESERCIZIO N.4

$\alpha \geq 0$. Siano $\begin{cases} 2x = r\cos\theta \\ 3y = r\sin\theta \end{cases}$ con $\begin{cases} r \geq 0 \\ \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$\frac{(2x+3y)^4 + (4x^2+9y^2)^2}{(4x^2+9y^2)^\alpha} = \frac{r^4}{r^{2\alpha}}\left[(\cos\theta+\sin\theta)^4+1\right]$$

$$= r^{4-2\alpha}\cdot\left[(\cos\theta+\sin\theta)^4+1\right] \xrightarrow[r\to 0]{} \begin{cases} +\infty & \text{se } 4-2\alpha<0 \\ 0 & \text{se } 4-2\alpha>0 \end{cases}$$

~~Quindi~~ se $4-2\alpha=0$, il limite esiste, ma dipende da θ.
Il limite per $(x,y)\to(0,0)$ esiste se $\boxed{0 \leq \alpha < 2}$

ESERCIZIO N.5

$$\begin{cases} \dot{x}^2 + x^2 = 49 \\ \dot{x}(0) > 0; \quad x(0) = \sin(\pi/23) \end{cases}$$

$\dot{x} = \pm\sqrt{49-x^2}$ Scelgo $+$ perché $\dot{x}(0)>0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{49-x^2} \\ x(0) = \sin(\pi/23) \end{cases} \qquad \frac{\dot{x}}{\sqrt{49-x^2}} = 1$$

$$t = \int_0^t 1\cdot ds = \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{\sqrt{49-x(s)^2}}\,ds = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{49-x^2}} =$$

$$= \int_{\sin(\pi/23)}^{x(t)} \frac{1}{7}\frac{dx}{\sqrt{1-(x/7)^2}} = \left[\arcsin\left(\frac{x}{7}\right)\right]_{\sin(\pi/23)}^{x(t)}$$

$$= \arcsin(x(t)/7) - \arcsin(\sin(\pi/23)/7)$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = 7\sin\left(t + \arcsin\left(\frac{\sin(\pi/23)}{7}\right)\right)}$$

(il dominio non era richiesto).

Il dominio "naturale" è $t\in\mathbb{R}$, occorre poi vedere cosa succede all'equazione quando $\dot{x}=0$ (valori interessanti !).