Estremanti relativi.

<u>Def.</u> Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$; $A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$; $x_0 \in A$.

- x_0 è un punto di <u>massimo relativo</u> per f in A se $\exists\, \delta > 0\ \forall x \in A: \|x - x_0\| \le \delta \Rightarrow f(x) \le f(x_0)$.
- x_0 è un <u>punto di minimo relativo</u> per f in A se $\exists\, \delta > 0\ \forall x \in A: \|x - x_0\| \le \delta \Rightarrow f(x) \ge f(x_0)$.

<u>Def.</u> Sia $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in \Omega$. x_0 è un <u>punto critico</u> di f se $\nabla f(x_0) = 0$.

<u>Def.</u> Siano $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in \Omega$ un punto critico di f. x_0 è un <u>punto di sella</u> per f se non è punto di massimo relativo, né di minimo relativo per f in Ω:

$\forall \delta > 0\ \exists\, x_1, x_2 \in \Omega: \|x_1 - x_0\| \le \delta, \|x_2 - x_0\| \le \delta,$
ma $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

- Quest'ultima definizione è giustificata dal

<u>Teorema di Fermat in più variabili.</u>
Sia $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, e sia $x_0 \in \Omega$ un punto di massimo relativo (o di minimo relativo) per f in Ω. Allora, $\nabla f(x_0) = 0$ (cioè, x_0 è un punto critico di f).

dim. Sia $x_0 \in \Omega$ un punto di max. relativo; ~~e sia $\delta>0$~~ suppongo $x_0 = 0$. Sia $\delta > 0$: $B(0, \delta) \subseteq \Omega$ e per $j = 1, \dots, n$, si definisce $\phi_j(t) = f(t e_j)$, $\phi_j : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ ($e_j = (0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$).

$\phi_j(0) = f(0)$ e se δ è scelto ~~come nella~~ in modo che $\|x\| \le \delta \Rightarrow f(x) \le f(0)$, allora $|t| \le \delta \Rightarrow \|t e_j\| \le \delta \Rightarrow \phi_j(t) \le \phi_j(0)$.

Cioè, $t = 0$ è p.to di MAX. (rel.) per ϕ_j in $(-\delta, \delta)$, dunque, per il T. di Fermat in una variabile,

$$0 = \phi_j'(0) = \nabla f(0) \cdot e_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0).$$

Ne segue che $\nabla f(0) = 0$ ∎

Teorema sulla classificazione dei punti critici. Siano $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, e sia $x_0 \in \Omega$ critico per f, $\nabla f(x_0) = 0$.

Sia $Q = Q_{f, x_0}$ la forma quadratica associata a $\mathrm{Hess} f(x_0)$. Allora:

(1) se Q è def. pos. $\Rightarrow x_0$ è p.to di min. rel.
(2) se Q è def. neg. $\Rightarrow x_0$ è p.to di MAX. rel.
(3) se Q è non def. $\Rightarrow x_0$ è p.to di sella

Nell'altra direzione,

(4) x_0 p.to di min. rel. $\Rightarrow Q$ semidef. pos.
(5) x_0 p.to di MAX. rel. $\Rightarrow Q$ semidef. neg.

dim. Essendo x_0 critico e $f \in C^2$,

$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2} h^T \cdot \mathrm{Hess} f(x_0) h + E(h)$, con $\frac{E(h)}{\|h\|^2} \xrightarrow[\|h\| \to 0]{} 0$. Dividendo per $\|h\|^2$,

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{\|h\|^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{\|h\|}\right)^T \cdot \mathrm{Hess} f(x_0) \left(\frac{h}{\|h\|}\right) + \frac{E(h)}{\|h\|^2}$$

$$(\emptyset) \qquad = \frac{1}{2} Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right) + \frac{E(h)}{\|h\|^2}.$$

(1) Sia Q def. pos. Poiché $\partial B(0,1) = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1\}$ è chiuso e limitato, per il T. di Weierstrass $\exists v_1 \in \mathbb{R}^n : \|v_1\| = 1$ e $Q(v) \ge Q(v_1) > 0$ $\forall v \in \partial B(0,1)$. In particolare, $Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \ge Q(v_1) > 0$.

Sia $\delta > 0$: $\forall h \in \mathbb{R}^n$ $\|h\| < \delta \Rightarrow \left|\frac{E(h)}{\|h\|^2}\right| \le Q(v_1)/4$ (esiste perché $\frac{E(h)}{\|h\|^2} \xrightarrow[\|h\| \to 0]{} 0$).

$$0 < \|h\| < \delta \Rightarrow \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{\|h\|^2} \ge \frac{1}{2} Q(v_1) - \frac{1}{4} Q(v_1)$$

$= \frac{1}{4} Q(v_1) > 0$, quindi $f(x_0 + h) > f(x_0)$ (x_0 è p.to di min. rel.).

(2) si mostra allo stesso modo.

(3) Siano $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$: $Q(v_1) < 0 < Q(v_2)$
(possiamo supporre $\|v_1\|, \|v_2\| = 1$).

Allora, $$\frac{f(x_0 + v_1 t) - f(x_0)}{t^2} = Q(v_1) + \frac{E(t v_1)}{t^2} \xrightarrow[t \to 0]{} Q(v_1) < 0$$

(perché $\|t v_1\|^2 = t^2$

quindi (per il permanenza del segno)
$f(x_0 + v_1 t) - f(x_0) < 0$ se $|t| \leq \delta$ $(\exists \delta)$
In particolare, x_0 <u>non</u> è pto di min. rel. per f.
Allo stesso modo, x_0 non è di max. rel.,
quindi è di sella.

(4) Se x_0 è pto di min. rel., $\exists \delta > 0$.
$$0 \leq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{\|h\|^2} = Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right) + \frac{E(h)}{\|h\|^2} =$$
$(\forall h : \|h\| \leq \delta)$

se $h = tv$, $\|v\| = 1$, $t = \|h\|$

$$= Q(v) + \frac{E(tv)}{t^2} \xrightarrow[t \to 0]{} Q(v)$$

$\Rightarrow Q(v) \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1.$

$\Rightarrow Q(x) = \|x\|^2 \cdot Q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq 0 \quad \forall x \neq 0$

(5) Si fa allo stesso modo