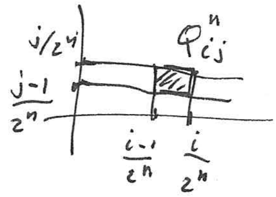
Integrali e misura secondo Peano-Jordan.

Nota: tutto ciò che segue si può fare in $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$, ma sviluppiamo qui la teoria per $d=2$. Il caso $d=1$ è più semplice (ed è importante); il caso $d=3$ presenta difficoltà ulteriori solo nella notazione (ed è pure importante).

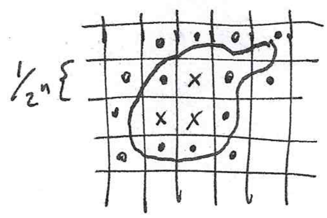
Costruzione della misura di Peano-Jordan. Dato: $E \subseteq \mathbb{R}^2$, limitato.

Sia $n \in \mathbb{N}$ e consideriamo

$$\mathcal{R}_n = \left\{ Q^n_{ij} = \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right] \times \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right] : i, j \in \mathbb{Z} \right\},$$



l'insieme dei quadrati di lato $1/2^n$ orientati secondo gli assi e aventi vertici con coordinate del tipo $k/2^n$ $(k \in \mathbb{Z})$.



Sia $\mathcal{P}^n_{est}(E) = \bigcup_{Q^n_{ij} \in I^n_{est}(E)} Q^n_{ij}$ dove $I^n_{est}(E) = \{ Q^n_{ij} \in \mathcal{R}_n : Q^n_{ij} \cap E \neq \emptyset \} \subseteq \mathcal{R}_n$

e sia $\mathcal{P}^n_{int}(E) = \bigcup_{Q^n_{ij} \in I^n_{int}(E)} Q^n_{ij}$ dove $I^n_{int}(E) = \{ Q^n_{ij} \in \mathcal{R}_n : Q^n_{ij} \subseteq E \} \subseteq I^n_{est}(E)$

> Sia E la superficie piena nella figura: $\mathcal{P}^n_{int}(E)$ è l'unione dei quadrati $\boxed{\times}$; $\mathcal{P}^n_{est}(E)$ è l'unione dei quadrati $\boxed{\times}$ o $\boxed{\cdot}$.

Pongo $\text{Area}(Q^n_{ij}) = \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2^n}$.

Se A è un insieme finito, $\text{Num}(A)$ è il numero dei suoi elementi.

Definisco:

$$\text{Area}^n_{est}(E) = \text{Area}\left(\mathcal{P}^n_{est}(E)\right) \overset{df.}{=} \text{Num}\left(I^n_{est}(E)\right) \cdot \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2^n} = \sum_{Q^n_{ij} \in I^n_{est}(E)} \text{Area}(Q^n_{ij}) \quad \text{e}$$

$$\text{Area}^n_{int}(E) = \text{Area}\left(\mathcal{P}^n_{int}(E)\right) \overset{df.}{=} \text{Num}\left(I^n_{int}(E)\right) \cdot \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2^n} = \sum_{Q^n_{ij} \in I^n_{int}(E)} \text{Area}(Q^n_{ij})$$

Abbiamo:

(1) $\mathcal{P}^n_{int}(E) \subseteq E \subseteq \mathcal{P}^m_{est}(E) \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$

(2) $\mathcal{P}^n_{int}(E) \subseteq \mathcal{P}^{n+1}_{int}(E)$ e $\mathcal{P}^n_{est}(E) \supseteq \mathcal{P}^{n+1}_{est}(E) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(3) $\text{Area}^n_{int}(E) \leq \text{Area}^{n+1}_{int}(E)$ e $\text{Area}^n_{est}(E) \geq \text{Area}^{n+1}_{est}(E) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(4) $\text{Area}^n_{int}(E) \leq \text{Area}^m_{est}(E) \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

(1) segue dalle definizioni ($\forall x \in E \ \exists Q^n_{ij} \in \mathcal{R}^n : x \in Q^n_{ij}$, quindi $E \subseteq \mathcal{P}^n_{est}(E)$; e $E \supseteq \mathcal{P}^n_{int}(E)$ è banale).

(4) segue da (1)

(2) La prima inclusione segue dal fatto che, se $Q \in \mathcal{R}^n$ e $Q \subseteq \mathcal{P}^n_{int}(E)$, allora i quattro ~~quadr~~ quadrati $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in \mathcal{R}^{n+1}$ di cui Q si compone stanno in $\mathcal{P}^{n+1}_{int}(E)$.

Viceversa, se $Q \in \mathcal{R}^{n+1}$ è contenuto in $\mathcal{P}^{n+1}(E)$, allora il quadrato $Q' \in \mathcal{R}^n$ che contiene Q sta in $\mathcal{P}^n(E)$.

(3) Segue da (2).

Da (3) e dal Teorema sul limite delle successioni monotone segue che

(5) $\exists \lim_{n\to\infty} \mathrm{Area}^n_{inf}(E) = \sup_n \mathrm{Area}^n_{inf}(E) \overset{df.}{=} \mathrm{Area}_{inf}(E)$

e $\exists \lim_{n\to\infty} \mathrm{Area}^n_{sup}(E) = \inf_n \mathrm{Area}^n_{sup}(E) \overset{df.}{=} \mathrm{Area}_{sup}(E)$.

Da (5) e (4) segue che

(6) $\mathrm{Area}_{inf}(E) \leq \mathrm{Area}^m_{est}(E) \quad \forall m \in \mathbb{N}$,

quindi che

(7) $\mathrm{Area}_{inf}(E) \leq \inf_m \mathrm{Area}^m_{est}(E) = \mathrm{Area}_{sup}(E)$

<u>Definizione</u>. E è <u>misurabile secondo Peano-Jordan</u> se

$$\mathrm{Area}_{inf}(E) = \mathrm{Area}_{est}(E) \overset{df.}{=} \mathrm{Area}(E).$$

<u>Nota sul caso 1-dim.</u> Questa volta $E \subseteq \mathbb{R}$ è limitato e, per $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}^n = \{ Q^n_i = [\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}] : i \in \mathbb{Z} \}$.

Gli oggetti $\mathcal{P}^n_{est}(E)$, $I^n_{est}(E)$, $\mathcal{P}^n_{int}(E)$, $I^n_{int}(E)$ sono definiti ugualmente.

In luogo di Area, usiamo Lungh = Lunghezza,

$$\mathrm{Lungh}^n_{est}(E) = \mathrm{Lungh}(\mathcal{P}^n_{est}(E)) \overset{df.}{=} \mathrm{Num}(I^n_{est}(E)) \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{Q^n_i \in I^n_{est}(E)} \mathrm{Lungh}(Q^n_i)$$

Così definiamo $\mathrm{Lungh}^n_{int}(E)$ e — procedendo come sopra — si arriva alle definizioni di insieme misurabile secondo Peano-Jordan e di lunghezza di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Ricordiamo che la frontiera ∂E di E è
$\partial E = \{ z \in \mathbb{R}^2 : \forall \varepsilon > 0 \quad B(z,\varepsilon) \cap E \neq \emptyset$ e $B(z,\varepsilon) \setminus E \neq \emptyset \}$.

Teorema. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$, limitato. Allora,
E è misurabile secondo Peano-Jordan $\Longleftrightarrow \mathrm{Area}_{est}(\partial E) = 0$.

dim. Mostreremo che $\exists c > 0 \quad (c = \frac{1}{9})$ t.c.

$$(*) \quad c \cdot \mathrm{Num}(I^n_{est}(\partial E)) \leq \mathrm{Num}(I^n_{est}(E)) - \mathrm{Num}\, I^n_{int}(E) \leq \mathrm{Num}(I^n_{est}(\partial E))$$

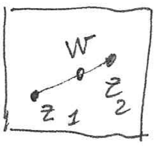
Moltiplicando $(*)$ per $\frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2^n}$ e facendo tendere $n \to \infty$,

$$(**) \quad c \cdot \mathrm{Area}_{est}(\partial E) \leq \mathrm{Area}_{est}(E) - \mathrm{Area}_{int}(E) \leq \mathrm{Area}_{est}(\partial E).$$

Dalla prima disuguaglianza in $(**)$ segue che, se $\mathrm{Area}_{est}(\partial E) > 0$, allora $\mathrm{Area}_{est}(E) \neq \mathrm{Area}_{int}(E)$, quindi E non è misurabile. Ciò mostra (per assurdo) $\Rightarrow$ nel Teorema.
Dalla seconda, invece, $\mathrm{Area}_{est}(\partial E) = 0 \Rightarrow \mathrm{Area}_{est}(E) = \mathrm{Area}_{int}(E)$, quindi E è misurabile: anche $\Leftarrow$ nel Teorema è dimostrata.

La seconda disuguaglianza in $(*)$ è facile. Se $Q^n_{ij} \in I^n_{est}(E) \setminus I^n_{int}(E)$, allora Q^n_{ij} contiene $z_1 \in E$ e $z_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus E$

Q^n_{ij}



Il segmento $[z_1, z_2]$ deve contenere qualche $w \in \partial E$ (vedi sotto una dimostrazione per gli scettici), quindi $Q^n_{ij} \in I^n_{est}(\partial E)$: $\quad I^n_{est}(E) \setminus I^n_{int}(E) \subseteq I^n_{est}(\partial E)$,
dunque (essendo $I^n_{int}(E) \subseteq I^n_{est}(E)$)

$$\mathrm{Num}(I^n_{est}(E) \setminus I^n_{int}(E)) = \mathrm{Num}(I^n_{est}(E)) - \mathrm{Num}(I^n_{int}(E)) \leq \mathrm{Num}(I^n_{est}(\partial E)),$$

Per gli scettici. Parametrizzo $[z_1, z_2]$ con $[0,1] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^2$,
$\gamma(t) = (1-t) z_1 + t z_2$: $\quad \gamma(0) = z_1 \in E$, $\gamma(1) = z_2 \notin E$. Sia
$\bar{t} = \inf\{ t \in [0,1] : \gamma(t) \notin E \} \leq 1$ (perché $\gamma(1) \notin E$) e sia
$w = \gamma(\bar{t})$. Esiste $\{t_n\}$ in $[0,1]$ t.c. $t_n \to \bar{t}$ e $\gamma(t_n) \notin E$, quindi
$\forall \varepsilon > 0 : B(w,\varepsilon) \setminus E \neq \emptyset$. Se esistesse $\varepsilon > 0 : B(w, \varepsilon) \cap E = \emptyset$, poi,

allora $\inf\{t\in[0,1] : \gamma(t)\notin E\} < \bar t$ (se $\bar t \neq 0$), assurdo;
oppure $\bar t = 0$, quindi $w=\gamma(0)=z_1\notin E$, altrettanto assurdo.
Ne segue che $\forall \varepsilon>0 : B(w,\varepsilon)\cap E\neq\emptyset$.

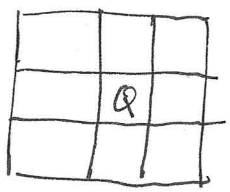
$\forall\varepsilon>0 \Rightarrow (B(w,\varepsilon)\setminus E\neq\emptyset$ e $B(w,\varepsilon)\cap E\neq\emptyset)$ significa $w\in\partial E$.

$\ast\ast\ast$

Torniamo alla <u>prima</u> disuguaglianza in (#).
Costruisco ($\forall n\in\mathbb{N}$) una funzione φ_n tra insiemi finiti,

$$I^n_{est}(\partial E) \xrightarrow{\varphi_n} I^n_{est}(E)\setminus I^n_{int}(E)$$

Sia $Q\in I^n_{est}(\partial E)$, e consideriamo i <u>nove</u> quadrati Q'

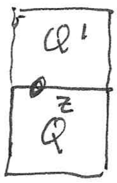


in $\mathbb{R}^n$ (compreso Q stesso!) t.c. $Q'\cap Q\neq\emptyset$. <u>Almeno</u> uno di essi deve stare in $I^n_{est}(E)\setminus I^n_{int}(E)$: chiamiamolo $\tilde{Q}=\varphi_n(Q)$. <u>Vediamo perché</u>

Vedi dim. più semplice più sotto

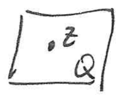
(1) Se tutti i nove quadrati stanno in $I^n_{int}(E)$, allora ogni punto $x\in Q$ non è di frontiera per E, $Q\cap\partial E=\emptyset$, contraddicendo $Q\in I^n_{est}(\partial E)$.
Dunque, esiste Q' tra i nove quadrati t.c. $Q'\notin I^n_{int}(E)$

(2) Una possibilità è che sia proprio $Q=Q'\notin I^n_{int}(E)$.
Poiché $Q\in I^n_{est}(\partial E)$, $\exists z\in\partial E\cap Q$.



(2.1)

(2.1) Potrebbe accadere che valga anche che $Q\notin I^n_{est}(E)$, cioè $Q\cap E=\emptyset$: allora $z\notin E$.

Non può essere che z sia nell'interno di Q: 

, altrimenti $z\notin\partial E$. Quindi $z\in\partial Q$, e allora esiste Q', uno degli otto quadrati rimanenti, t.c. $z\in\partial Q'$ e ~~[illegible]~~ $Q'\cap E\neq\emptyset$.
Allora $Q'\cap E\neq\emptyset$ e $Q'\setminus E\neq\emptyset$ perché $Q'\setminus E\ni z$

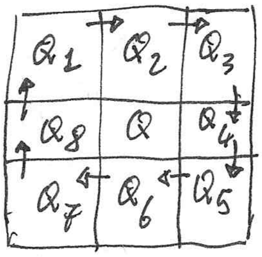
Abbiamo quindi trovato $\varphi_n(Q)$ nel caso (2.1)

(2.2) Se invece $Q \notin I^n_{int}(E)$, ma $Q \in I^n_{est}(E)$:

poniamo in questo caso $\varphi_n(Q) = Q$.

(3) Vediamo ora il caso $Q \in I^n_{int}(E)$ e sia Q' uno degli altri otto quadrati per cui $Q' \notin I^n_{int}(E)$. Quindi $Q' \setminus E \neq \emptyset$, ma anche $Q' \cap Q \neq \emptyset$ (almeno un punto: ) e $Q \subseteq E$, dunque $Q' \cap E \neq \emptyset$: $Q' \in I^n_{est}(E) \setminus I^n_{int}(E)$ e abbiamo finito.

Una dimostrazione più semplice al posto di (1)-(3).



Per ipotesi, $Q \in I^n_{est}(\partial E)$. Numero gli altri quadrati come in figura.

Se $Q_1 \in I^n_{est}(E) \setminus I^n_{int}(E)$, sono a posto.

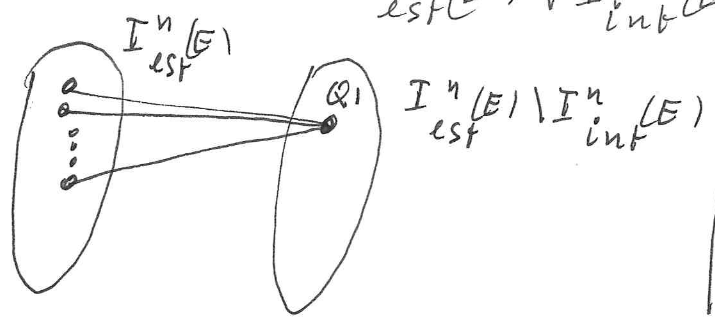
(1) Se $Q_1 \in I^n_{int}(E)$, allora – poiché $Q_2 \cap Q_1 \neq \emptyset$ – ho che $Q_2 \cap E \neq \emptyset$. Dunque, o $Q_2 \in I^n_{est}(E) \setminus I^n_{int}(E)$ e ho finito, o $Q_2 \in I^n_{int}(E)$. Così procedendo, o trovo $Q_j \in I^n_{est}(E) \setminus I^n_{int}(E)$ (e ho finito) o $Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_8 \subseteq E$. Poiché $Q \cap Q_1 \neq \emptyset$, in quest'ultimo caso ho che $Q \in I^n_{est}(E) \setminus I^n_{int}(E)$ (e ho finito), oppure $Q \subseteq E$, contraddicendo l'ipotesi che qualche $z \in \partial E$ appartenga a Q.

potrei partire da un Q_j qualsiasi

(2) Se nessun Q_j sta in $I^n_{int}(E)$, né in $I^n_{est}(E) \setminus I^n_{int}(E)$, allora $\forall j$: $Q_j \cap E = \emptyset$. Allora $Q \setminus E \neq \emptyset$ (perché $Q \cap Q_1 \neq \emptyset$), ma $Q \cap E \neq \emptyset$ (altrimenti nessun $z \in \partial E$ sta in Q) ∎

Abbiamo ora $I^n_{est}(\partial E) \xrightarrow{\varphi_n} I^n_{est}(E) \setminus I^n_{int}(E)$, ottenuta, ricordiamo, scegliendo $\forall Q \in I^n_{est}(\partial E)$ uno dei quadrati $Q' \in \mathcal{R}^n$ t.c. $Q' \cap Q \neq \emptyset$ e $Q \in I^n_{est}(E) \setminus I^n_{int}(E)$. Nulla ci assicura che φ_n sia iniettiva: lo stesso quadrato $Q' \in \mathcal{R}_n$ potrebbe essere stato scelto in corrispondenza di diversi $Q \in I^n_{est}(\partial E)$.

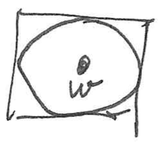
Sia $Q' \in I^n_{est}(E) \setminus I^n_{int}(E)$ e consideriamo $\varphi_n^{-1}(Q') = \{ Q \in I^n_{est}(\partial E) : \varphi_n(Q) = Q' \}$.
Ogni $Q \in \varphi_n^{-1}(Q')$ deve essere $Q \in \mathcal{R}^n$ e $Q \cap Q' \neq \emptyset$, quindi $Num(\varphi_n^{-1}(Q')) \leq 9$: cioè, non più di nove "oggetti" $Q \in I^n_{est}(\partial E)$ vanno in ciascuna "scatola" $Q' \in I^n_{est}(E) \setminus I^n_{int}(E)$. Ne segue che



$Num(I^n_{est}(E) \setminus I^n_{int}(E))\ 9 \geq$

$\geq \cdot Num(I^n_{est}(\partial E))$, come volevamo mostrare ■

OSS. $I^n_{int}(\partial E) = \emptyset$. Infatti, se $Q \in I^n_{int}(\partial E)$, $Q \subseteq \partial E$, il che è assurdo perché il centro w di Q, per esempio, sarebbe contenuto in ∂E con la sfera $B(w, \frac{1}{2^{n+1}})$, contraddicendo la def. di ∂E.



Ne segue che $Area_{int}(\partial E) = 0$ $\forall E \subseteq \mathbb{R}^2$, limitato.
Quindi:
∂E è misurabile $\iff Area_{est}(\partial E) = 0 \iff E$ è misurabile.

Teorema (additività della ~~misura~~ area).

Se $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ sono limitati e misurabili secondo Peano-Jordan, allora anche $E_1 \cap E_2$ ed $E_1 \cup E_2$ sono misurabili secondo P-J e

$$Area(E_1 \cup E_2) + Area(E_1 \cap E_2) = Area(E_1) + Area(E_2).$$

dim. Abbiamo le relazioni insiemistiche:

$$I^n_{int}(E_1) \cap I^n_{int}(E_1) = I^n_{int}(E_1 \cap E_2); \; I^n_{est}(E_1) \cap I^n_{est}(E_2) \supseteq I^n_{est}(E_1 \cap E_2)$$

$$I^n_{est}(E_1) \cup I^n_{est}(E_2) = I^n_{est}(E_1 \cup E_2); \; I^n_{int}(E_1) \cup I^n_{int}(E_2) \subseteq I^n_{int}(E_1 \cup E_2)$$

(verificabili facilmente: esercizio).

Usando la relazione per insiemi finiti A, B:

$$Num(A) + Num(B) = Num(A \cup B) + Num(A \cap B),$$

otteniamo

$$Num(I^n_{int}(E_1)) + Num(I^n_{int}(E_2)) = Num(I^n_{int}(E_1) \cup I^n_{int}(E_2)) + Num(I^n_{int}(E_1) \cap I^n_{int}(E_2))$$

$$\leq Num(I^n_{int}(E_1 \cup E_2)) + Num(I^n_{int}(E_1 \cap E_2)) \leq Num(I^n_{est}(E_1 \cup E_2)) + Num(I^n_{est}(E_1 \cap E_2))$$

$$\leq Num(I^n_{est}(E_1) \cup I^n_{est}(E_2)) + Num(I^n_{est}(E_1) \cap I^n_{est}(E_2)) = Num(I^n_{est}(E_1)) + Num(I^n_{est}(E_2)).$$

Moltiplicando per $\frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2^n}$ e facendo tendere $n \to \infty$:

$$Area_{int}(E_1) + Area_{int}(E_2) \leq Area_{int}(E_1 \cup E_2) + Area_{int}(E_1 \cap E_2)$$

$$\leq Area_{est}(E_1 \cup E_2) + Area_{est}(E_1 \cap E_2) \leq Area_{est}(E_1) + Area_{est}(E_2).$$

Poiché E_1, E_2 sono misurabili, il primo e l'ultimo termine coincidono, dunque abbiamo $=$ ovunque.

Essendo poi $Area_{int} \leq Area_{est}$ in generale, abbiamo

$$Area_{int}(E_1 \cup E_2) = Area_{est}(E_1 \cup E_2) \text{ e } Area_{int}(E_1 \cap E_2) = Area_{est}(E_1 \cap E_2) \;\blacksquare$$

Proprietà varie dell'area secondo P. J.

(1) $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, limitati, $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow Area_{est}(E_1) \le Area_{est}(E_2)$

(2) Le seguenti sono equivalenti per $E \subseteq \mathbb{R}^2$, limitato.

(2.1) E è misurabile e $Area(E)=0$

(2.2) $Area_{est}(E)=0$

(2.3) $E \subseteq \partial E$ e $Area_{est}(\partial E)=0$

(3) $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, E_1, E_2 limitati, $Area_{est}(E_2)=0 \Rightarrow Area_{est}(E_1)=0$

(4) $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ misurabili, limitati e $E_1 \cap E_2 \subseteq \partial E_1 \cap \partial E_2$

$\Rightarrow Area(E_1 \cup E_2) = Area(E_1) + Area(E_2)$

(5) Sia l il segmento $l = \{(x,0),\ 0 \le x \le L\}$.

Allora $Area(l)=0$.

(6) E_1, E_2 misurabili e limitati in $\mathbb{R}^2$, $E_2 \subseteq E_1$

$\Rightarrow Area(E_1 \setminus E_2) = Area(E_1) - Area(E_2)$

dim. (1) Segue dalla definizione.

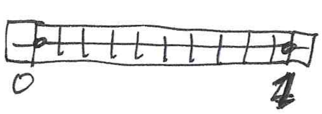
(2) (2.1) $\Rightarrow$ (2.3) Se E è mis., allora $Area(\partial E)=0$. Se $E \not\subseteq \partial E$, allora $\exists n \in \mathbb{N}\ \exists Q \in \mathcal{Q}^n$: $Q \subseteq E \Rightarrow Area(E) \ge Area(Q) = \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2^n} > 0$.

(2.3) $\Rightarrow$ (2.2) Da (1), $Area_{est}(E) \le Area_{est}(\partial E) = 0$.

(2.2) $\Rightarrow$ (2.1) Poiché $Area_{int}(E) \le Area_{est}(E) = 0$, E è mis. e $Area(E)=0$.

(3) Segue da (1).

(4) Segue dal Teo. che precede e da (3).

(5) 

Considero $L=1$ (il caso generale è del tutto simile). $Num(I^n_{est}(l)) = 2 \cdot 2^n + 4$,

quindi $Area(\mathcal{P}^n_{est}(l)) = \frac{2 \cdot 2^n + 4}{2^n \times 2^n} = \frac{1}{2^n}(2 + o(1)) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ ∎

(6) $E_1 = E_2 \cup (E_1 \setminus E_2)$, $E_2 \cap (E_1 \setminus E_2) = \emptyset$ e $\partial(E_2 \setminus E_1) \subseteq \partial E_2 \cup \partial E_1$

$\Rightarrow Area(E_1) = Area(E_2) + Area(E_1 \setminus E_2)$ ∎