Per saperne di più. Dimensione di Hausdorff (nella versione semplificata della "box dimension".

Problema della dimensione: trovare delle definizioni di dimensione che siano allo stesso tempo (1) corrispondenti alla nostra intuizione a priori di ciò che la dimensione è; (2) calcolabili in pratica; (3) utili a discriminare diverse proprietà di diversi oggetti geometrici.

Due risposte, in sostanza. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

(i) dimensione(E) = "gradi di libertà di un punto mobile vincolato a stare in E"
(dimensione topologica)

(ii) Calcolo, al variare di $\varepsilon > 0$, di quanti insiemi (palle, cubi, ...) di diametro ε sono necessari a coprire E.

Dall'algebra lineare abbiamo la nozione (collegata sia ad (i) che a (ii)) di dimensione di uno spazio vettoriale. ~~La~~ La ricerca legata alla dimensione ~~...~~ è molto attiva anche in questi anni.

Definizione di "box dimension" alla Hausdorff. Dato: $E \subseteq \mathbb{R}^2$, chiuso e limitato. (Considero $\mathbb{R}^2$, ma $\mathbb{R}^d$ con $d \in \mathbb{N}$ andrebbe bene).

Considero, come sopra, $\forall n \in \mathbb{N}$: $I^n_{est}(E)$, $P^n_{est}(E)$.

Fisso $\alpha \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e pongo:

$$H^n_\alpha(E) = \mathrm{Num}\left(I^n_{est}(E)\right) \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right)^\alpha$$

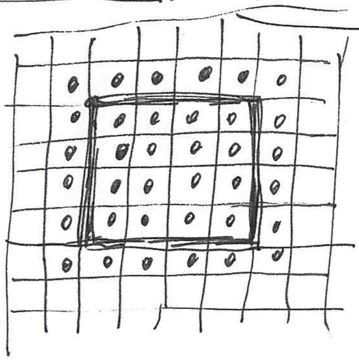
Per $\alpha = 2$: $H^n_2(E) = \mathrm{Area}\left(P^n_{est}(E)\right)$ è la quantità vista prima.

La successione $\{H^n_\alpha(E)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è $\begin{cases} \text{crescente se } \alpha = 0 \text{ (Esercizio)} \\ \text{decrescente se } \alpha = 2 \text{ (già visto)} \end{cases}$

Per $0 < \alpha < 2$, non è l'una, né l'altra, e potrebbe anche non avere limite. Per rimediare, introduciamo la nozione di limite superiore di una successione.

Prima, però, vediamo alcuni esempi.

ESEMPIO 1. Sia $Q_0 = [0,1]\times[0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ il quadrato "unitario".



Sia $n \in \mathbb{N}$ e consideriamo $NUM(I^n_{est}(Q_0)) =$

$= 2^n \times 2^n + 4\times 2^n + 4$ (includendo i quadrati

$= 2^{2n}\cdot(1+4\cdot 2^{-n}+4\cdot 2^{-2n})$ di $\mathcal{Q}_n$ sulla "cornice" di Q_0)

Quindi,

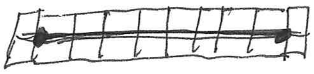
$$H^n_\alpha(Q_0) = NUM(I^n_{est}(Q_0))\cdot 2^{-\alpha n} = 2^{(2-\alpha)n}\cdot\big(1+\underset{n\to\infty}{o(1)}\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{se } 0\le\alpha<2 \\ 1 & \text{se } \alpha=2 \\ 0 & \text{se } \alpha>2 \end{cases}$$

Il valore $\boxed{\alpha=2}$ fa da "soglia" tra α troppo piccoli ($\alpha=1$ corrisponde a misurare la <u>lunghezza</u> di Q_0) e valori troppo grandi ($\alpha=3$ misura il <u>volume</u> di Q_0).

ESEMPIO 2. Sia $I_0 = [0,1]\times\{0\} = \{(x,0) : 0\le x\le 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ un segmento unitario sull'asse x.

$$NUM(I^n_{est}(I_0)) = 2\times 2^n + 4 = 2^n\times(2+o(1)),$$

quindi

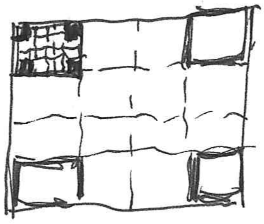


$$H^n_\alpha(I_0) = NUM(I^n_{est}(I_0))\cdot 2^{-\alpha n} = 2^{(1-\alpha)n}\cdot\big(1+\underset{n\to\infty}{o(1)}\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{se } 0\le\alpha<1 \\ 2 & \text{se } \alpha=1 \\ 0 & \text{se } \alpha>1 \end{cases}$$

Il valore di soglia è $\boxed{\alpha=1}$.

<u>Idea</u>: se troviamo un valore di soglia $\alpha(E)$ per $E\subseteq\mathbb{R}^2$, questo valore può essere pensato come <u>dimensione</u> di E.

ESEMPIO 3. Siano $E_0 = Q_0$ dell'esempio 1.



$E_1 \subseteq E_0$ l'unione di quattro quadrati incastrati negli angoli di E_0, aventi lato pari a $\frac{1}{4}$ di quello di E_0.

$E_2 \subseteq E_1$ l'unione di 4^2 quadrati negli angoli dei 4 quadrati che costituiscono E_1, con lato $(1/4)^2$

Eccetera... Sia $E = \bigcap_{k=0}^{+\infty} E_k$.

Sia $a_n = NUM(I^n_{est}(E))$. Per costruzione, $a_0 = 9$, $a_1 = 16$, $a_2 = 4\times 9$, $a_3 = 4\times 16$, ..., $a_{2k} = 9\times 4^k$, $a_{2k+1} = 16\times 4^k$...

$$a_{2k}\cdot 2^{-2k\alpha} = 9\times 2^{2k(1-\alpha)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{se } 0\le\alpha<1 \\ 9 & \text{se } \alpha=1 \\ 0 & \text{se } \alpha>1 \end{cases} \quad \text{e} \quad a_{2k+1}\cdot 2^{-(2k+1)\alpha} \xrightarrow[k\to\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{se } 0\le\alpha<1 \\ 8 & \text{se } \alpha=1 \\ 0 & \text{se } \alpha>1 \end{cases}$$

Il valore di soglia è $\boxed{\alpha=1}$, anche se non esiste $\lim_{n\to\infty} H^n_1(E)$.

Sia $\{a_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$.
Sia $LIM(\{a_n\}) = \{\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} :$ $\exists$ una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ di $\{a_n\}$ t.c. $a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha \}$, l'insieme limite di $\{a_n\}$. Il limite superiore di $\{a_n\}$ è

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \overset{df.}{=} \sup LIM(\{a_n\}).$$

Def. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$ chiuso, limitato, e sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$.
Allora,

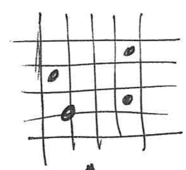
$$\limsup_{n\to\infty} H^n_\alpha(E) \overset{df.}{=:} H_\alpha(E)$$

è la misura "box" α-dimensionale di E.

(Nota. Per una teoria ben fatta, $H_\alpha(E)$ sarebbe la misura α-dim. "superiore" e dovremmo introdurne una "inferiore").

Oss. $H_0(E)$ ~~= Num(E)~~ è confrontabile con $Num(E)$, il numero di punti di E
($H_0(E) = +\infty$ sse E non è un insieme finito).

Infatti, $H^n_0(E) = Num(I^n_{est}(E))$ è il numero di quadrati in $\mathbb{R}^{(n)}$ che intersecano E.
Se l'insieme E è finito, e n è grande abbastanza



$H_0(E) = 7$

$$Num(E) \leq H^n_0(E) \leq 4 \cdot Num(E)$$

caso in cui tutti i punti di E sono vertici di quadrati in $\mathbb{R}^n$.

Teorema. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$ chiuso, limitato.
Allora, $\exists \alpha = \alpha(E) \in [0,2]$:

$$H_\alpha(E) = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad 0 \leq \alpha < \alpha(E) \\ 0 & \text{se} \quad \alpha > \alpha(E) \end{cases}$$

$\alpha(E)$ è detto la dimensione "box" di E.

Dimostrazione (nel caso più semplice in cui $\forall \alpha \geq 0 \ \exists \lim\limits_{n\to\infty} H_\alpha^n(E) \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$.).

Valgono le seguenti.

(i) Se $\lim\limits_{n\to\infty} H_\alpha^n(E) < +\infty$ e $\beta > \alpha \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} H_\beta^n(E) = 0$

(ii) Se $\lim\limits_{n\to\infty} H_\alpha^n(E) > 0$ e $\gamma < \alpha \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} H_\gamma^n(E) = +\infty$

(iii) Se $\alpha < \beta \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} H_\alpha^n(E) \geq \lim\limits_{n\to\infty} H_\beta^n(E)$.

(iii) segue dalla def. di $H_\alpha^n(E)$ e dal fatto che $\left(\frac{1}{2^n}\right)^\alpha > \left(\frac{1}{2^n}\right)^\beta$ se $\alpha < \beta$.

(i) $$H_\beta^n(E) = Num\left(I_{est}^n(E)\right)\cdot\left(\frac{1}{2^n}\right)^\beta = Num\left(I_{est}^n(E)\right)\cdot\left(\frac{1}{2^n}\right)^\alpha\cdot\left(\frac{1}{2^n}\right)^{\beta-\alpha}$$

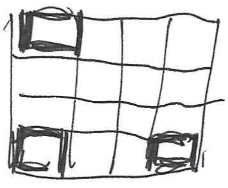
$$\xrightarrow[n\to\infty]{} H_\alpha(E)\cdot 0 = 0$$ perché $H_\alpha(E) = \lim\limits_{n\to\infty} H_\alpha^n(E) < +\infty$.

(ii) $$H_\gamma^n(E) = Num\left(I_{est}^n(E)\right)\cdot\left(\frac{1}{2^n}\right)^\alpha\cdot\left(\frac{1}{2^n}\right)^{\gamma-\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} H_\alpha(E)\cdot(+\infty) = +\infty$$

Da (i)-(ii) segue che non esistono $\alpha_1 < \alpha_2$ t.c. $0 < H_{\alpha_1}(E)$, $H_{\alpha_2}(E) < +\infty$; quindi (per (iii)) che esiste $\alpha(E)$ t.c. $\alpha < \alpha(E) \Rightarrow H_\alpha(E) = +\infty$ e $\alpha > \alpha(E) \Rightarrow H_\alpha(E) = 0$.

Un confronto con l'esempio 1 (quello di Q_0) mostra che $H_\alpha(E) = 0$ se $\alpha > 2$ (con $E \subseteq \mathbb{R}^2$ chiuso, limitato). ▯

Esempio 4. Modificando l'esempio 3, prendiamo ogni volta solo 3 dei quadrati. Sia F l'insieme ottenuto. Per $\alpha \geq 0$, il calcolo di $H_\alpha(F)$ si riduce allo studio di:



$$3^k \cdot 2^{-2\alpha k} = \left(\frac{3}{4^\alpha}\right)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{se } 4^\alpha < 3 \quad \left(\alpha < \frac{\log 3}{\log 4}\right) \\ 0 & \text{se } 4^\alpha > 3 \quad \left(\alpha > \frac{\log 3}{\log 4}\right) \end{cases}$$

Quindi, $\dim(F) = \frac{\log 3}{\log 4} \in (0,1)$ non è intero!