Teorema della divergenza. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto regolare; $\partial\Omega = \overline{\Sigma}_1 \cup \dots \cup \overline{\Sigma}_n$ (ogni Σ_j è una superficie regolare con bordo regolare in $\mathbb{R}^3$) e sia $F = (P, Q, R) \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$.

Allora,

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \cdot dx\,dy\,dz,$$

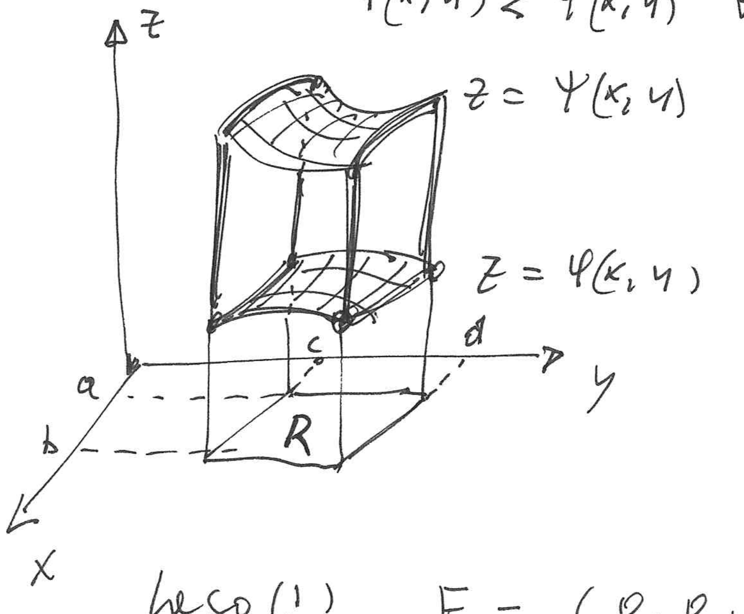
dove $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} F\cdot\nu\,d\sigma = \sum_{j=1}^{n} \iint_{\overline{\Sigma}_j} F\cdot\nu\,d\sigma$ e ν è la normale esterna.

Dimostrazione (nel caso particolare in cui

$\overline{\Omega} = \{(x,y,z) : \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$ e

$\varphi, \psi : R = [a,b]\times[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$; $\varphi, \psi \in C^1(R, \mathbb{R})$.)

$\varphi(x,y) < \psi(x,y) \quad \forall (x,y) \in R$



Strategia: inizio con l'integrale di volume, integro per parti finché non ho rimosso le derivate delle componenti di F.

Caso (1). $F = (0, 0, R)$; $\operatorname{div} F = \partial_z R$.

$$\iiint_{\overline{\Omega}} \operatorname{div} F \cdot dx\,dy\,dz = \iint_{R} dx\,dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \partial_z R(x,y,z)\,dz \quad \left(\begin{array}{l}\text{Integrale} \\ \text{"per fili"}\end{array}\right)$$

$$= \iint_{R} \left[R(x,y,\psi(x,y)) - R(x,y,\varphi(x,y))\right] dx\,dy \quad (\text{T.F.C.I.})$$

$$= \iint_{R} R(x,y,\psi(x,y))\,dx\,dy - \iint_{R} R(x,y,\varphi(x,y))\,dx\,dy = I_1 - I_2$$

Scrivo $\partial\Omega = \bar{\Sigma}_1 \cup \bar{\Sigma}_2 \cup \bar{\Sigma}_3 \cup \bar{\Sigma}_4 \cup \bar{\Sigma}_5 \cup \bar{\Sigma}_6$

dove $\bar{\Sigma}_1 = \{(x,y,\Psi(x,y)) : (x,y) \in R\}$

$\bar{\Sigma}_2 = \{(x,y,\varphi(x,y)) : (x,y) \in R\}$

e dove $\bar{\Sigma}_3, \bar{\Sigma}_4, \bar{\Sigma}_5, \bar{\Sigma}_6$ sono le facce "verticali" di $\partial\Omega$:

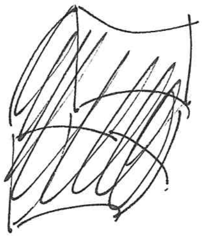
$$\bar{\Sigma}_3 = \{(a,y,z) : c \le y \le d;\ \varphi(a,y) \le z \le \Psi(a,y)\}$$

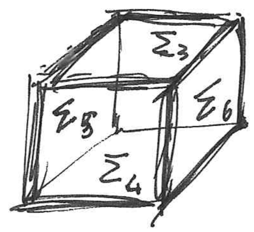
$$\bar{\Sigma}_4 = \{(b,y,z) : c \le y \le d;\ \varphi(b,y) \le z \le \Psi(b,y)\}$$

$$\bar{\Sigma}_5 = \{(x,c,z) : a \le x \le b;\ \varphi(x,c) \le z \le \Psi(x,c)\}$$

$$\bar{\Sigma}_6 = \{(x,d,z) : a \le x \le b;\ \varphi(x,d) \le z \le \Psi(x,d)\}.$$

Nel caso $F = (0,0,R)$; $F \cdot \nu = 0$ su $\bar{\Sigma}_3 \cup \bar{\Sigma}_4 \cup \bar{\Sigma}_5 \cup \bar{\Sigma}_6$.





Parametrizzo $\bar{\Sigma}_1$, $\bar{\Sigma}_2$.

$$\Phi_2 : R \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad R \subset \mathbb{R}^2$$

$$\Phi_2(x,y) = (x, y, \varphi(x,y))$$

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \hline & \partial_x \Phi_2 & \\ \hline & \partial_y \Phi_2 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & \partial_x \varphi \\ 0 & 1 & \partial_y \varphi \end{vmatrix} = (-\partial_x \varphi, -\partial_y \varphi, 1)$$

Poichè la componente z è positiva, la parametrizzazione <u>non è</u> compatibile con la normale esterna; quindi

$$\iint_{\Sigma_2} F \cdot \nu \, d\sigma = -\iint_R \left(0, 0, R(x,y,\varphi(x,y))\right) \cdot \left(-\partial_x \varphi(x,y), -\partial_y \varphi(x,y), 1\right) dx\,dy$$

$$= -\iint_R R(x,y,\varphi(x,y))\, dx\,dy = -I_2$$

Allo stesso modo mostro che

$$\iint_{\overline{\Sigma}_2} F\cdot\nu\, d\sigma = I_2, \quad \text{quindi che}$$

$$\iiint_{\overline{\Omega}} \operatorname{div} F\, dx\,dy\,dz = I_1 - I_2 = \iint_{\overline{\Sigma}_1} F\cdot\nu\, d\sigma + \iint_{\overline{\Sigma}_2} F\cdot\nu\, d\sigma$$

$$= \iint_{\partial\Omega} F\cdot\nu\, d\sigma; \quad \text{come si voleva.}$$

Caso (2). $F = (P, 0, 0)$; $\operatorname{div} F = \partial_x P$.

$$\iiint_{\overline{\Omega}} \operatorname{div} F \cdot dx\,dy\,dz = \iint_{R} dx\,dy \cdot \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \partial_x P(x,y,z)\, dz$$

Problema: nell'integrale interno non possiamo usare il T.F.C.I., né usare direttamente la derivazione sotto segno d'integrale, poiché gli estremi d'integrazione dipendono da x.
Soluzione: parto da quello che otterrei (anti-) derivando sotto segno d'integrale. Cioè, dimostro il

Lemma. Siano P, φ, ψ come nel Teorema.
Allora:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} P(x,y,z)\,dz\right\} = \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \partial_x P(x,y,z)\,dz + P(x,y,\psi(x,y))\cdot\partial_x\psi(x,y)$$
$$- P(x,y,\varphi(x,y))\cdot\partial_x\varphi(x,y).$$

Dimostrazione del Lemma. Considero la funzione $\Gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$;

$$\Gamma(x) = (x, \varphi(x,y), \psi(x,y)) = (x,u,v) \ (\text{con } y \text{ fissato}).$$

(In realtà, $\Gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^3$).

Considero anche $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$G(x,u,v) = \int_u^v P(x,y,z)\,dz .$$

(In realtà, $G : B \to \mathbb{R}$, dove $B \subseteq \mathbb{R}^3$,

$B = \{(x,u,v) :\ a \le x \le b$ e $\varphi(x,y) \le u \le v \le \psi(x,y)\}$

con y fissato).

Chiaramente, $$(G \circ \Gamma)(x) = \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} P(x,y,z)\,dz .$$

Poiché $\dot{\Gamma}(x) = (1,\ \partial_x \varphi(x,y),\ \partial_x \psi(x,y))$

e $$\nabla G(x,u,v) = \Big(\int_u^v \partial_x P(x,y,z)\,dz;\ -P(x,y,\varphi(x,y));\ P(x,y,\psi(x,y)) \Big)$$

(per T.F.C.I. e derivazione sotto segno d'integrale), ho che:

$$(G \circ \Gamma)^{\cdot}(x) = \nabla G(\Gamma(x)) \cdot \dot{\Gamma}(x) = \nabla G(x, \varphi(x,y), \psi(x,y)) \cdot \dot{\Gamma}(x)$$

$$= \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \partial_x P(x,y,z)\,dz - P(x,y,\varphi(x,y)) \cdot \partial_x \varphi(x,y) + P(x,y,\psi(x,y)) \cdot \partial_x \psi(x,y),$$

come si voleva dimostrare ■

Usando il Lemma, ho che

$$\iint_R dx\,dy \cdot \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \partial_x P(x,y,z)\,dz =$$

$$= \iint_R dx\,dy \cdot \partial_x \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} P(x,y,z)\,dz$$

$$+ \iint_R dx\,dy \cdot P(x,y,\varphi(x,y)) \cdot \partial_x \varphi(x,y)$$

$$- \iint_R dx\,dy \cdot P(x,y,\psi(x,y)) \cdot \partial_x \psi(x,y) = J + I_5 - I_6$$

Ora, $J \overset{df.}{=} \iint_R dx\,dy \cdot \partial_x \left\{ \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} P(x,y,z)\,dz \right\}$

$$= \int_c^d dy \cdot \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} P(x,y,z)\,dz \right\} dx$$

$$= \int_c^d dy \cdot \left[\int_{\varphi(a,y)}^{\psi(a,y)} P(a,y,z)\,dz - \int_{\varphi(b,y)}^{\psi(b,y)} P(b,y,z)\,dz \right]$$

per T. F. C. I.

$$= \iint_{\{(y,z):\ c \le y \le d;\ \varphi(a,y) \le z \le \psi(a,z)\}} P(a,y,z)\,dy\,dz - \iint_{\{(y,z):\ c \le y \le d;\ \varphi(b,y) \le z \le \psi(b,z)\}} P(b,y,z)\,dy\,dz$$

$= I_3 - I_4.$

Ora, come nel caso (1) calcolo: $\iint_{\Sigma_2} F \cdot \nu\, d\sigma = -\iint_R (P;0;0) \cdot (-\partial_x \varphi, -\partial_y \varphi; 1)\,dx\,dy$

$= \iint_R P(x,y,\varphi(x,y)) \cdot \partial_x \varphi(x,y)\,dx\,dy = I_5$ e, analogamente,

$\iint_{\Sigma_1} F \cdot \nu\, d\sigma = -I_6$. Ovviamente, $F \cdot \nu = 0$ su $\Sigma_5 \cup \Sigma_6$.

Pongo $\Phi_3(y,z) = (a,y,z)$;

$\Phi_3 : \{(y,z) : c \le y \le d;\ \varphi(a,z) \le z \le \psi(a,z)\} \to \mathbb{R}^3$.

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ & \partial_y \Phi_3 & \\ & \partial_z \Phi_3 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,0,0),$$

che <u>non è compatibile</u> con la normale esterna.

Allora,

$$\iint_{\Sigma_3} F \cdot \nu \, d\sigma = - \iint_{\{(y,z)\,:\, c \le y \le d;\ \varphi(a,y) \le z \le \psi(a,y)\}} (P(a,y,z), 0, 0) \cdot (1,0,0) \, dy \, dz$$

$$= - \iint_{\{(y,z)\,:\, c \le y \le d;\ \varphi(a,y) \le z \le \psi(a,y)\}} P(a,y,z) \cdot dy \, dz \qquad = - I_4 .$$

Analogamente, $\displaystyle \iint_{\Sigma_4} F \cdot \nu \, d\sigma = I_5$.

Sommando: $$\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma = \left(\iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_3} + \iint_{\Sigma_4} + \iint_{\Sigma_5} + \iint_{\Sigma_6} \right) F \cdot \nu \, d\sigma$$

$= I_3 - I_4 + I_5 - I_6 + 0 + 0$, come si voleva.

<u>Caso (3)</u>. $F = (0, Q, 0)$: si fa come il caso (2).

Per linearità, il Teorema segue dai tre casi. Siano infatti $F = (P,Q,R) = (P,0,0) + (0,Q,0) + (0,0,R) = F_1 + F_2 + F_3$. Allora,

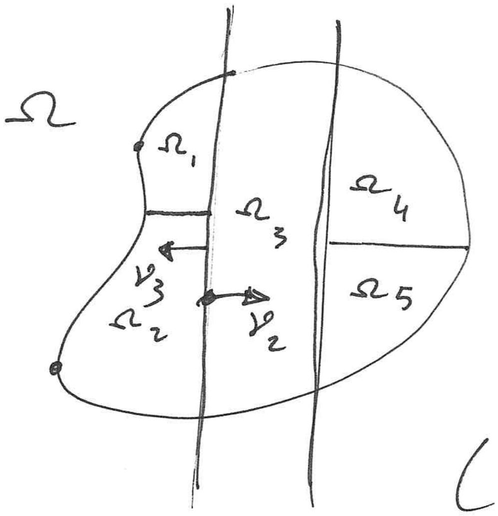
$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \cdot dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega} (\operatorname{div} F_1 + \operatorname{div} F_2 + \operatorname{div} F_3) \, dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F_1 \cdot dx\,dy\,dz + \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F_2 \cdot dx\,dy\,dz + \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F_3 \cdot dx\,dy\,dz$$

$$= \iint_{\partial\Omega} F_1 \cdot \nu \, d\sigma + \iint_{\partial\Omega} F_2 \cdot \nu \, d\sigma + \iint_{\partial\Omega} F_3 \cdot \nu \, d\sigma = \iint_{\Omega} (F_1 + F_2 + F_3) \cdot \nu \, d\sigma$$

$= \iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma$, come si voleva

<u>Come estendere il T. della divergenza dal caso particolare a quello generale?</u>



L'idea è di dividere Ω in regioni Ω_j ($1 \le j \le N$) che soddisfano le ipotesi particolari della dimostrazione (per qualche scelta di ~~una~~ una coppia "privilegiata" di variabili). In questo modo,

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega_1} \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz + \dots + \iiint_{\Omega_N} \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz$$

Quanto al flusso di F, ogni parte "piatta" di bordo (quella in comune tra diversi Ω_j) è contata <u>due volte</u>, ma con <u>segni opposti</u> (perché la normale <u>esterna</u> a Ω_2, in figura, è quella interna a Ω_3): rimangono solo i contributi provenienti da $\partial\Omega$.