Campi vettoriali esatti e chiusi.

Def. Un campo vettoriale F definito su $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è una funzione $A \xrightarrow{F} \mathbb{R}^n$.

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Un campo vettoriale $F \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ è esatto se $\exists\, \varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ t.c.

$$F = \nabla \varphi$$

φ è un potenziale di F.

oss. Siano $F \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e siano $\varphi, \psi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Se Ω è connesso per archi e φ è un potenziale per F, allora

ψ è un potenziale per $F \iff \varphi - \psi$ è costante.

Def. Sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale C^1. F è chiuso $\iff$

$$\forall\, i,j = 1, \dots, n \qquad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \text{in } \Omega,$$

dove $F = (F_1, \dots, F_n)$ sono componenti di F.

oss. (Poincaré). Sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.
Se F è esatto, allora F è chiuso.

dim. F esatto $\Rightarrow \exists\, \varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$: $F_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ $(j = 1, \dots, n)$
$\Rightarrow$ (per il T. di Schwarz) che $\partial_i F_j = \partial_i \partial_j \varphi = \partial_j \partial_i \varphi = \partial_j F_i$ ∎

- Nelle applicazioni è utile sapere se F è esatto. In concreto è facile verificare che F è chiuso. Sotto quali condizioni su Ω, F posso invertire l'osservazione di Poincaré, e dire che F chiuso in $\Omega \Rightarrow F$ esatto in Ω?

Un primo risultato (elementare, ma utile) riguarda alcuni campi dotati di simmetrie.

Def. Sia $F \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. F è radiale se ha la forma $\quad F(x) = x\, f(\|x\|^2)$,
dove $f \in C(I, \mathbb{R})$, $I \subseteq [0, +\infty)$ un intervallo.

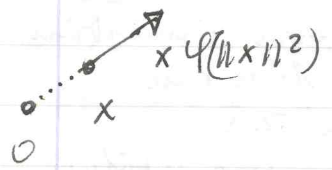
oss. Se F è radiale, il suo dominio naturale è $\Omega = \{x : \|x\| \in I\}$. Quindi Ω è una palla, $\Omega = B(0,R) \subseteq \mathbb{R}^n$, se $I = [0, R)$, ed è un "guscio" $\Omega = \{x : a < \|x\| < b\}$, se $I = (a, b)$ con $0 \le a < b \le +\infty$ (ho scelto gli intervalli per cui Ω è aperto). Nel caso $a = 0$, $b = +\infty$, $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è lo "spazio bucato", quello naturalmente associato a gravità e elettrostatica.

$I = [0, R)$ $\qquad$ $I = (a, b)$, $0 < a < b < \infty$ $\qquad$ $I = (0, +\infty)$

Proprietà. Se $F \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ è radiale, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, allora F è esatto.

oss. In tutto ciò la chiusura di F non entra.

__Dim.__ Vado a buonsenso e cerco un potenziale φ radiale,



$$\varphi(x) = \Phi(\|x\|^2), \quad \Phi \in C^1(I, \mathbb{R}).$$

La mia richiesta è allora:

$$x f(\|x\|^2) = F(x) = \nabla\varphi(x) = 2x\, \Phi'(\|x\|^2),$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal Teorema sul differenziale di una composizione,

$$\begin{array}{ccccc} x & \longmapsto & t = \|x\|^2 & \longmapsto & \Phi(t) \\ \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 2x & & \Phi'(t) & & \end{array}$$

Cioè, voglio $f = 2\Phi'$, ovvero (se $t_0 \in I$)

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} f(s)\, ds + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Il potenziale cercato è

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\|x\|^2} f(s)\, ds + k \quad \blacksquare$$

Prima del risultato principale di queste pagine, abbiamo bisogno di una def.

__Def.__ Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Ω è __convesso__ se $\forall x_1, x_2 \in \Omega$, $[x_1, x_2] \subseteq \Omega$, dove $[x_1, x_2]$ è il segmento con estremi x_1, x_2.

- Poiché $[x_1, x_2]$ ammette la parametrizzazione

$$\left.\begin{array}{l} t \overset{\alpha}{\longmapsto} (1-t)x_1 + t x_2 \\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \end{array}\right] \to \alpha(0) = x_1,\ \alpha(1) = x_2$$

la definizione di convessità può essere utilmente formalizzata.

Ω è convesso $\iff \forall x_1, x_2 \in \Omega \ \forall t \in [0,1] \subseteq \mathbb{R}$:

$$(1-t)x_1 + t x_2 \in \Omega.$$

__Teorema__ (Volterra – Poincaré). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto convesso e sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale chiuso in Ω.

Allora, F è esatto.

- Prima di dimostrare il Teorema, investighiamo la relazione tra campi vettoriali esatti e lavoro.

__Teorema.__ Sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale esatto; $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ connesso per archi; e sia $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ un potenziale per F.

Allora,

$\forall \gamma \in C^1([a,b], \Omega)$, una curva C^1 in Ω, ho che

$$\int_\gamma F \cdot dx = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

__Dim.__ Derivando rispetto a $t \in [a,b]$,

$(\varphi \circ \gamma)'(t) = (\nabla\varphi)(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t) = F(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)$, quindi

$$\int_\gamma F \cdot dx \overset{\text{def}}{=} \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\, dt = \int_a^b (\varphi \circ \gamma)'(t)\, dt$$

$$= (\varphi\circ\gamma)(b) - (\varphi\circ\gamma)(a) = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) \quad \blacksquare$$

Alcune notevoli conseguenze di questo conto sono elencate qui sotto.

<u>Teorema</u>. Sia $F \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ aperto e connesso per archi. Le seguenti affermazioni sono equivalenti.

(a) F è esatto

(b) ~~[illegible]~~ $\forall \alpha, \beta : [a,b] \to \Omega$,
$\alpha(a) = \beta(a)$ e $\alpha(b) = \beta(b)$; $\alpha, \beta \in C^1([a,b], \Omega)$,

$$\int_\alpha F \cdot dx = \int_\beta F \cdot dx$$

(c) $\forall \gamma : [a,b] \to \Omega$; $\gamma \in C^1([a,b], \Omega)$

$$\gamma(a) = \gamma(b) \Rightarrow \int_\gamma F \cdot dx = 0$$

In tutti questi casi, un potenziale di F è il seguente. Sia $x_0 \in \Omega$ fissato e, $\forall x \in \Omega$, sia $\gamma_x \in C^1([a,b], \Omega)$ t.c. $\gamma_x(a) = x_0$ e $\gamma_x(b) = x$.

Allora $\varphi(x) = \int_{\gamma_x} F(z) \cdot dz$

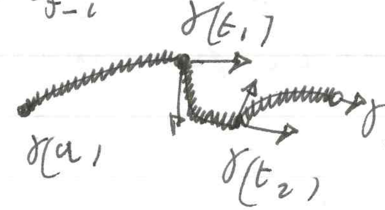
è il lavoro di F lungo γ_x (che è indipendente dalla particolare γ_x per (b)).

<u>OSS</u>. Si verifica facilmente che, invece che curve C^1, possiamo considerare curve γ che siano <u>C^1 a tratti</u>.

$\gamma \in C(\,[a,b], \Omega)$, $\exists\, a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ t.c. ~~[illegible]~~ $\gamma \in C^1([t_{j-1}, t_j], \Omega)$ per $j = 1, \dots, m$.

(cioè $\gamma \in C^1((t_{j-1}, t_j), \Omega)$ e

$\exists \lim\limits_{t \to t_{j-1}^+} \dot\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$, $\exists \lim\limits_{t \to t_j^-} \dot\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ per $j = 1 \dots m$)



Alcuni "salti di velocità" sono ammessi.

<u>Dim</u>. del Teorema.

(a) $\Rightarrow$ (c) Sia φ un potenziale per F. Per il Teorema precedente,

$$\int_\gamma F \cdot dx = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = 0 \text{ perché } \gamma(b) = \gamma(a).$$

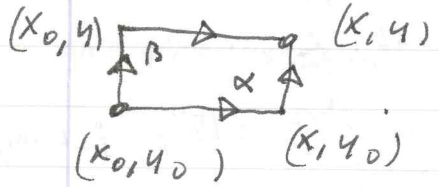
(c) $\Rightarrow$ (b) Se α, β sono come nelle ipotesi, pongo $\gamma = \beta^{-1} \circ \alpha : [a, 2b-a] \to \mathbb{R}^n$

Allora (vedi note sul lavoro): $\gamma(2b-a) = \gamma(a)$ e quindi

$$0 = \int_\gamma F \cdot dx = \int_\alpha F \cdot dx - \int_\beta F \cdot dx$$ come si voleva.

(b) $\Rightarrow$ (a) Lo dimostro per $n=2$ e (per abbreviare gli argomenti) suppongo che $\Omega = \mathbb{R}^2$.

Sia $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ fissato e, per $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, siano α e β due cammini tra (x_0,y_0) e (x,y)



(suppongo $x \geq x_0$ e $y \geq y_0$) come in figura.

Sia $F = (P,Q)$.

Pongo
$$\varphi(x,y) = \int_\alpha F \circ dz$$
$$= \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,s)\,ds$$

e ho, per ipotesi, che
$$\varphi(x,y) = \psi(x,y) = \int_\beta F \circ dz$$
$$= \int_{y_0}^{y} Q(x_0,s)\,ds + \int_{x_0}^{x} P(t,y)\,dt$$

Per T.F.C.I. ho che
$\partial_y \varphi(x,y) = Q(x,y)$ e che
$\partial_x \varphi(x,y) = \partial_x \psi(x,y) = P(x,y)$.

cioè, $\nabla\varphi(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = F(x,y)$: φ è un potenziale per F, che è quindi esatto.

L'ultima conseguenza segue dal Teorema che precede: essendo F esatto, ha un potenziale φ, che posso supporre soddisfi $\varphi(x_0) = 0$ (altrimenti, considero $\varphi - \varphi(x_0)$ al suo posto). Ho quindi che $\varphi(x) =$
$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi(\gamma_x(b)) - \varphi(\gamma_x(a))$$
$$= \int_{\gamma_x} F(z) \circ dz \quad \blacksquare$$

<u>Dim.</u> del Teorema di Volterra-Poincaré.

~~Faccio~~ Suppongo, per poter dimostrare il Teorema con i nostri strumenti, che $n=2$ e che

(i) $\Omega = \mathbb{R}^2$

(ii) $F = (P,Q) \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, non solo C^1.

Vedremo dopo come estendere la dimostrazione a Ω convesso.

Fisso $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ e, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, definisco le stesse φ, ψ della pagina precedente. ~~Supponiamo ancora che~~

Ho che $\Psi(x_0,y_0) = 0 = \Psi(x_0,y_0)$. (A)
Per T. F. C. I. ho che

$\partial_y \Psi(x,y) = Q(x,y)$ e $\partial_x \Psi(x,y) = P(x,y)$. (B)

Prima di procedere, ho bisogno di:

<u>Lemma</u> (Derivazione sotto segno di integrale). Sia $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è aperto e $\Omega \supseteq R = [a,b] \times [c,d]$. ~~...~~

Definisco $\eta : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$,

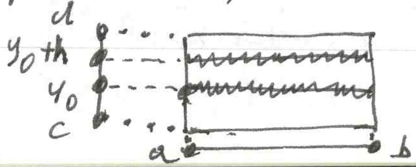
$$\eta(y) = \int_a^b f(t,y)\, dt.$$

Allora, $\forall y \in [c,d]$

$$\exists \ \frac{d}{dy}\eta(y) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(t,y)\, dt.$$

<u>OSS</u>. Questo Lemma vale anche se $f \in C^1$, ma la dimostrazione sarebbe più faticosa. È per questo motivo che, nella dim. del T. di Volterra-Poincaré, stiamo supponendo che $F \in C^2$.

<u>dim. del Lemma</u>. Sia $M = \max_{(x,y)\in R} \left| \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) \right|$ (esiste per T. Weierstrass) e siano $y_0 \in [c,d]$, $h \in \mathbb{R}$: $y_0 + h \in [c,d]$.



Calcolo: $\left| \frac{\eta(y_0+h) - \eta(y_0)}{h} - \int_a^b \partial_y f(t,y_0)\, dt \right|$

$$= \left| \frac{1}{h} \cdot \left[\int_a^b f(t, y_0+h)\, dt - \int_a^b f(t,y_0)\, dt \right] - \int_a^b \partial_y f(t,y_0)\, dt \right|$$

$$= \left| \int_a^b \left[\frac{f(t,y_0+h) - f(t,y_0)}{h} - \partial_y f(t,y_0) \right] dt \right|$$

per linearità degli integrali

$$= \left| \int_a^b \frac{h}{2} \partial_{yy} f(t, y_0 + h\,\Theta(t,h))\, dt \right|$$

per la formula di Taylor al II ordine con resto secondo Lagrange applicata alla funzione $y \longmapsto f(t,y)$, che mi dà

$$f(t, y_0+h) = f(t,y_0) + \partial_y f(t,y_0) \cdot h + \frac{1}{2} \partial_{yy} f(t, y_0 + \Theta \cdot h) \cdot h^2,$$

con $\Theta = \Theta(t,h) \in [0,1]$ dipendente da h e (ovviamente) da t;

$$\leq \frac{|h|}{2} \cdot \int_a^b |\partial_{yy} f(t, y_0 + h \cdot \Theta(t,h))|\, dt$$

$$\leq \frac{M \cdot (b-a)}{2} \cdot |h| \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \text{ in } \mathbb{R}.$$

Ne deduco che

$$\exists \ \eta'(y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\eta(y_0+h) - \eta(y_0)}{h} = \int_a^b \partial_y f(t,y_0)\, dt,$$

come si voleva ∎

Tornando a φ, $\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y) =$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,s)\,ds\right\}$$

$$= P(x,y_0) + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\int_{y_0}^{y} Q(x,s)\,ds\right\} \quad \text{per T.F.C.I.}$$

$$= P(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,s)\,ds \quad \left\{\text{derivando sotto integrale}\right.$$

$$= P(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial P}{\partial y}(x,s)\,ds \quad \left\{\begin{array}{l}\text{perché } F \text{ è } \underline{\text{chiuso}}: \\ \partial_x Q = \partial_y P\end{array}\right.$$

$$= P(x,y_0) + P(x,s)\Big|_{y_0=s}^{y} \quad \text{per T.F.C.I.}$$

$$= P(x,y_0) + P(x,y) - P(x,y_0) = P(x,y)\ ;$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y) = P(x,y) \text{ e, con conti simili,} \\ \qquad \overset{(B)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\psi(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y) = Q(x,y) \overset{(B)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\psi(x,y)\end{array}\right\} (C).$$

~~(A),(C) e il fatto che $\Omega = \mathbb{R}^2$ sia connesso per archi mostrano che~~

La funzione φ, in particolare, soddisfa $\nabla\varphi = (P,Q)$, come si voleva dimostrare. $\boxtimes$

Una dimostrazione leggermente diversa per il caso $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, convesso.

Dim. Fisso $(x_0,y_0) \in \Omega$. Sia $(x,y) \in \Omega$. Allora, il segmento che congiunge (x_0,y_0) e (x,y) è contenuto in Ω. Lo parametrizzo così: $\alpha : [0,1] \to \Omega$;

$$t \longmapsto \alpha(t) = (1-t)(x_0,y_0) + t(x,y)$$
$$= ((1-t)x_0 + tx,\ (1-t)y_0 + ty)$$

Osservo che, derivando una composizione,

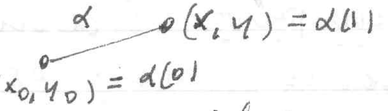
$$\frac{d}{dt} P(\alpha(t)) = \partial_x P(\alpha(t))(x-x_0) + \partial_y P(\alpha(t))(y-y_0)$$
$$= \partial_x P(\alpha(t))(x-x_0) + \partial_x Q(\alpha(t))(y-y_0) \qquad (*)$$

sotto l'ipotesi che F sia chiuso.

Definiamo $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ mediante

$$\varphi(x,y) = \int_0^1 \left[P(\alpha(t))(x-x_0) + Q(\alpha(t))(y-y_0)\right] dt$$

$$= \int_\alpha F \cdot dz$$



Derivo rispetto a x e uso il Lemma sulle derivate sotto integrale, tenendo conto di:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{P(\alpha(t))\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{P((1-t)x_0 + tx, (1-t)y_0 + ty)\right\}$$
$$= \partial_x P(\alpha(t)) \cdot t, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left\{Q(\alpha(t))\right\} = \partial_x Q(\alpha(t)) \cdot t\ ;$$

$$\partial_x \varphi(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left\{P(\alpha(t))\cdot(x-x_0) + Q(\alpha(t))\cdot(y-y_0)\right\} dt$$

$$= \int_0^1 \left\{P(\alpha(t)) + \left[\partial_x P(\alpha(t))(x-x_0) + \partial_x Q(\alpha(t))\cdot(y-y_0)\right] t\right\} dt$$

Integrando per parti e usando (*)

$$= \int_0^1 P(\alpha(t))\,dt + \int_0^1 \frac{d}{dt}\{P(\alpha(t))\}\cdot t\,dt$$

$$= \int_0^1 P(\alpha(t))\,dt + \Big[P(\alpha(t))\cdot t\Big]_0^1 - \int_0^1 P(\alpha(t))\cdot 1\,dt$$

$$= \int_0^1 P(\alpha(t))\,dt + P(\alpha(1))\cdot 1 - P(\alpha(0))\cdot 0 - \int_0^1 P(\alpha(t))\,dt$$

$$= P(\alpha(1)) = P(x,y),$$

cioè, $\partial_x \varphi(x,y) = P(x,y)$ e, allo stesso modo, $\partial_y \varphi(x,y) = Q(x,y)$,

cioè, φ è un potenziale per F, che è quindi esatto $\blacksquare$

<u>Un esempio</u> di campo vettoriale chiuso, ma non esatto.

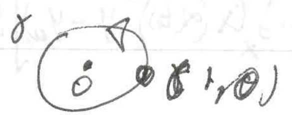
Sia $F: \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$

$$= \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Sia $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \doteq (\alpha(t), \beta(t))$

Una parametrizzazione della circonferenza unitaria.



Allora, γ è chiusa, ma

$$\int_\gamma F\cdot dz \overset{\text{def.}}{=} \int_0^{2\pi}[P(\gamma(t))\,\dot\alpha(t) + Q(\gamma(t))\,\dot\beta(t)]\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi}[-\sin(t)\cdot(-\sin(t)) + \cos(t)\cdot\cos(t)]\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi \neq 0, \text{ quindi } F$$

<u>non è esatto</u>. D'altra parte,

$$\partial_x Q(x,y) = \frac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\partial_y P(x,y) = \frac{(-1)(x^2+y^2) - (-y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

quindi F è chiuso.

<u>Esercizi</u>. (1) Sia $F: \mathbb{R}^3\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

(il campo gravitazionale Newtoniano). Troverne potenziale.

(2) Sia $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x,y) = (2xy + x, x^2 - y^2 - y)$$

E' esatto? Se sì, troverne un potenziale.

(3) Sia $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $F(x,y,z) = (yz, xz, xy)$.

E' esatto? Se sì, calcolarne un potenziale.