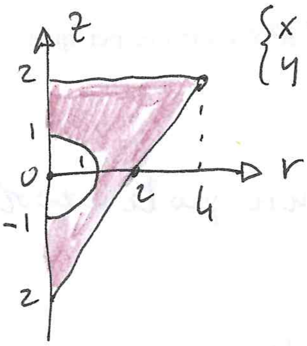
II Prova parziale scritta di Analisi Matematica II
Ingegneria Edile-Architettura, 2 febbraio 2011

Nome...**Cognome**... **Matricola**.................

Prova orale verso: *l'inizio* | *la fine* dell'appello; **non** nel *mattino* | *pomeriggio* del giorno (Cancellare la voce che non interessa).

(1) **[20 pti]** Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme $\Omega = \left\{(x,y,z) : \sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}} - 2 \le z \le 2,\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2 \ge 1\right\}$.

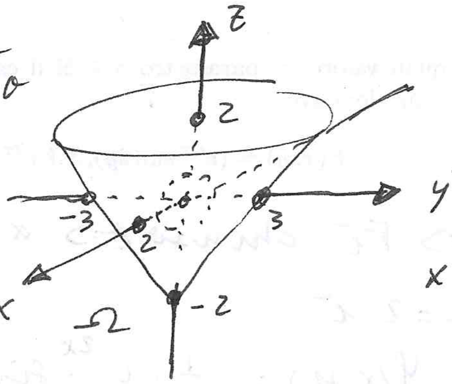
(1.1) Fare un disegno *qualitativo* di Ω.

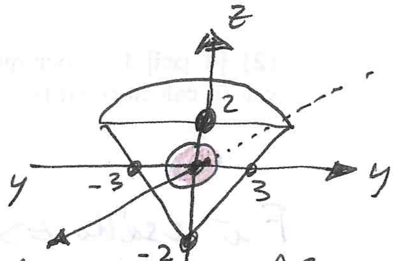


$\begin{cases} x = 2r\cdot\cos\theta \\ y = 3r\cdot\sin\theta \end{cases}$

$r \ge 0$

$|\theta| \le \pi$





$\Omega \cap \{x \le 0\}$

(1.2) Parametrizzare $\partial\Omega$ e dire se la parametrizzazioni scelte sono o meno compatibili con il campo ν normale a $\partial\Omega$ esternamente a Ω. $\Sigma_1 = \{(x,y,z) : z = 2;\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \le 16\}$

$A_1 = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 4;\ |\theta| \le \pi\} \xrightarrow{\Phi_1} \mathbb{R}^3;\ \Phi_1(r,\theta) = (2r\cos\theta, 3r\sin\theta, 2)$ è comp.

$\Sigma_2 = \{(x,y,z) : \sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}} - 2 = z;\ -2 \le z \le 2\};\ A_2 = A_1 \xrightarrow{\Phi_2} \mathbb{R}^3;\ \Phi_2(r,\theta) = (2r\cos\theta, 3r\sin\theta, r-2)$ non è comp.

$\Sigma_3 = \{(x,y,z) : \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2 = 1\};\ A_3 = \{(\theta,z) : |z| \le 1;\ |\theta| \le \pi\} \xrightarrow{\Phi_3} \mathbb{R}^3$

$\Phi_3(\theta,z) = (2\sqrt{1-z^2}\cdot\cos\theta, 3\cdot\sqrt{1-z^2}\cdot\sin\theta; z)$ non è comp

(1.3) Sia $F \in C^1(\Omega,\mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale. Scrivere *una* formula esplicita che dia il flusso $\iint_{\partial\Omega} F\cdot\nu d\sigma$ di F attraverso $\partial\Omega$.

$$\iint_{\partial\Omega} F\circ\nu\, d\sigma = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^4 dr \cdot F(2r\cos\theta, 3r\sin\theta, 2)\circ(0,0,6r)$$

$$-\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^4 dr \cdot F(2r\cos\theta, 3r\sin\theta, r-2)\circ(-3r\cos\theta, -2r\sin\theta; 6r)$$

$$-\int_{-1}^{1} dz \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \cdot F(2\sqrt{1-z^2}\cdot\cos\theta; 3\cdot\sqrt{1-z^2}\cdot\sin\theta; z)\circ(3\sqrt{1-z^2}\cos\theta, 2\sqrt{1-z^2}\cdot\sin\theta; 6z)$$

(1.4) Calcolare il flusso di cui al punto (1.4) quando $F(x,y,z) = (xz, yz, z^2)$.

$$\iint_{\partial\Omega} F\circ\nu\, d\sigma = 480\cdot\pi$$

(1.5) . Sia $\Sigma = \left\{(x,y,z) : \sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}} - 2 = z,\ |z| \le 1\right\}$. Parametrizzare $\partial\Sigma$ e dire se le parametrizzazioni scelte sono compatibili con la scelta μ della normale a Σ per cui $\mu = -\nu$ (ν essendo la normale di cui al punto (1.2)).

$\gamma_+ : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^3;\ \gamma_+(\theta) = (6\cos\theta; 9\sin\theta; 1)$ è comp. con μ

$\gamma_- : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^3;\ \gamma_-(\theta) = (2\cos\theta; 3\sin\theta; -1)$ non è comp. con μ

(1.6) Calcolare $\iint_{(\Sigma,\mu)}(\nabla \times G)\cdot d\sigma$, con $G \in C^1(\Sigma,\mathbb{R}^3)$, $G(x,y,z) = (-y,y,z)$.

$$\shortparallel$$

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \times G) \bullet \mu \, d\sigma = 48\pi$$

(2) **[4 pti]** Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è esatto e, per quei valori, calcolarne il potenziale; dove

$$F(x,y) = \left(e^{\alpha x}\sin(2y), 3 + e^{2x}\cos(\alpha y)\right).$$

F è esatto $\Leftrightarrow$ F è chiuso $\Leftrightarrow$ $\alpha = 2$ e un potenziale di F per $\alpha = 2$ è

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot \sin(2y) + 3y$$

(3) **[6 pti]** Sia $A = \{(x,y) : \ |2x+3y| \le 1, \ |3x-2y| \le 1|\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\iint_A e^{2x+3y}dxdy. = \frac{2}{13}\cdot\left(e - e^{-1}\right)$$

(4) **[3 pti]** Per ogni (x,y) in $\mathbb{R}^2$ si consideri la soluzione $\zeta = \zeta_{(x,y)}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{\zeta}(t) + \zeta(t) = 0 \\ \zeta(0) = x \\ \dot{\zeta}(0) = y. \end{cases}$$

Per ogni $t \in \mathbb{R}$ fissato, consideriamo la funzione $\Phi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(u,v) = \Phi_t(x,y) = \zeta_{(x,y)}(t)$. Calcolare la matrice jacobiana di Φ_t e trovare $K \in \mathbb{R}$ tale che la relazione

$$\iint_{\Phi_t(A)} f(\overset{v}{x},\overset{v}{y})d\overset{v}{x}d\overset{v}{y} = K \iint_A f(\Phi_t(\overset{x}{u},\overset{y}{v}))d\overset{x}{u}d\overset{y}{v}$$

valga per ogni insieme chiuso A che sia limitato e Peano-Jordan misurabile in $\mathbb{R}^2$, e per ogni funzione $f \in C(A,\mathbb{R})$.

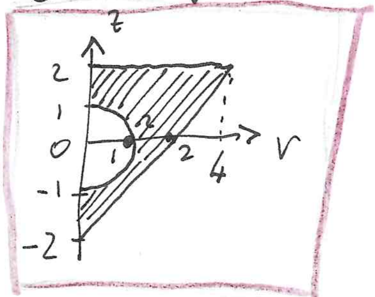
$$J\Phi_t(x,y) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\det(J\Phi_t(x,y)) = 1$$

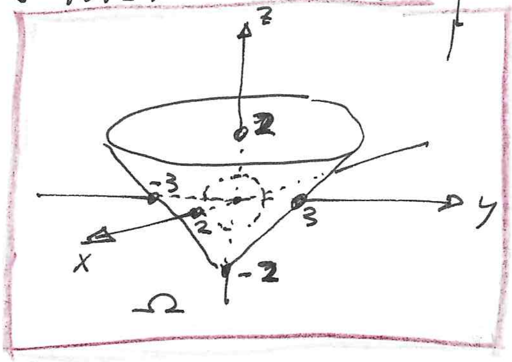
$$K = |\det J\Phi_t(x,y)| = 1$$

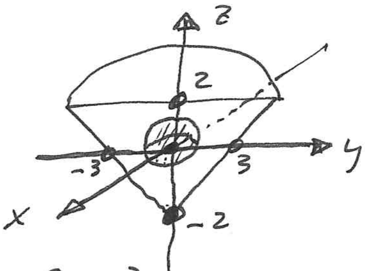
① Pongo $\begin{cases} x = 2r\cos\theta \\ y = 3r\sin\theta \end{cases}$ $0 \le r$, $|\theta| \le \pi$; $r = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}}$.

Le condizioni che definiscono Ω sono: $r^2 \ge 1$; $r - 2 \le z \le 2$



(1∘1)





$\Omega \cap \{x \le 0\}$

(1∘2) $\Sigma_1 = \left\{(x,y,z) : z = 2;\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 16\right\}$; $A_1 = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 4;\ |\theta| \le \pi\} \xrightarrow{\Phi_1} \mathbb{R}^3$

$\Phi_1(r,\theta) = (2r\cos\theta;\ 3r\sin\theta;\ 2)$; $(\partial_r \Phi_1 \times \partial_\theta \Phi_1)(r,\theta) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2\cos\theta & 3\sin\theta & 0 \\ -2r\sin\theta & 3r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$

$= (0, 0, 6r)$: compatibile con ν.

$\Sigma_2 = \left\{(x,y,z) : \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}} - 2 = z;\ -2 \le z \le 2\right\}$; $A_2 = A_1 \xrightarrow{\Phi_2} \mathbb{R}^3$.

$\Phi_2(r,\theta) = (2r\cos\theta;\ 3r\sin\theta;\ r-2)$; $(\partial_r \Phi_2 \times \partial_\theta \Phi_2)(r,\theta) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2\cos\theta & 3\sin\theta & 1 \\ -2r\sin\theta & 3r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$

$= (-3r\cos\theta;\ -2r\sin\theta;\ 6r)$: non compatibile con ν perché punta verso l'alto ($6r > 0$).

$\Sigma_3 = \left\{(x,y,z) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1\right\}$; $A_3 = \{(\theta, z) : |z| \le 1;\ |\theta| \le \pi\} \xrightarrow{\Phi_3} \mathbb{R}^3$

$\Phi_3(\theta, z) = (2\sqrt{1-z^2}\cdot\cos\theta;\ 3\cdot\sqrt{1-z^2}\cdot\sin\theta;\ z)$; $(\partial_\theta \Phi_3 \times \partial_z \Phi_3)(\theta, z) =$ (con $v_0 = \sqrt{1-z^2}$)

$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2v_0\sin\theta & 3v_0\cos\theta & 0 \\ -2\frac{z}{v_0}\cos\theta & -3\frac{z}{v_0}\sin\theta & 1 \end{vmatrix} = (3v_0\cos\theta;\ 2v_0\sin\theta;\ 6z)$: non compatibile

(1∘3) Senza Teo. della divergenza: $\iint_{\partial\Omega} F \circ \nu \, d\sigma =$

$= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^4 dr.\, F(2r\cos\theta;\ 3r\sin\theta;\ 2) \circ (0,0,6r) - \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^4 dr.\, F(2r\cos\theta; 3r\sin\theta; r-2) \circ (-3r\cos\theta; -2r\sin\theta; 6r)$

$- \int_{-1}^{1} dz \int_{-\pi}^{\pi} d\theta.\, F(2\sqrt{1-z^2}\cos\theta;\ 3\sqrt{1-z^2}\cdot\sin\theta;\ z) \circ (3\sqrt{1-z^2}\cdot\cos\theta;\ 2\sqrt{1-z^2}\cdot\sin\theta;\ 6z)$

Con il Teo. della divergenza e in coordinate cilindriche:

$$\iint_{\partial\Omega} F \circ \nu \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-1}^{1} dz \int_{\sqrt{1-z^2}}^{z+2} 6r\,dr\ \operatorname{div} F(2r\cos\theta; 3r\sin\theta; z)$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{\{z:\ 1 \le |z| \le 2\}} dz \int_0^{z+2} 6r\,dr.\ \operatorname{div} F(2r\cos\theta;\ 3r\sin\theta;\ z)$$

(1.4) ... uso ... una formula di (1.3).

$$\iint_{\partial\Omega} F\circ\nu\, d\sigma = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-1}^{1} 4z\,dz \int_{\sqrt{1-z^2}}^{z+2} 6r\,dr + \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \cdot \int_{1\le|z|\le 2} 4z\,dz \cdot \int_0^{z+2} 6r\,dr$$

$$= 2\pi\cdot\int_{-1}^{1} 4z\,dz\cdot 3\cdot[(z+2)^2-(1-z^2)] + 2\pi\cdot\int_{1\le|z|\le 2} 4z\,dz\cdot 3\cdot(z+2)^2$$

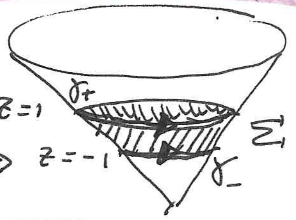
$$= 24\pi\cdot\left[\frac{(z+2)^3}{3}\right]_{-2}^{2} + 24\pi\cdot\left(\frac{z^3}{3}-z\right)_{-1}^{1} = 24\pi\cdot\frac{64}{3} + 48\pi\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right) = 8\pi(64-4)$$

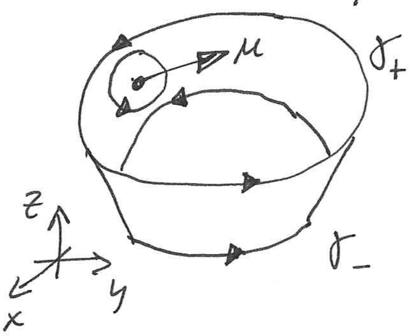
$$\boxed{\iint_{\partial\Omega} F\circ\nu\, d\sigma = 480\cdot\pi.}$$

(1.5)

$r=3 \iff z=1$

$r=1 \iff z=-1$





Uso le coordinate cilindriche già utilizzate

$\boxed{\gamma_+(\theta)=(6\cos\theta,\ 9\sin\theta,\ 1);\ \dot\gamma_+(\theta)=(-6\sin\theta;\ 9\cos\theta;\ 0)}$

~~...~~ γ_+ è compatibile con μ.

$\gamma_+:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}^3$

$\boxed{\gamma_-(\theta)=(2\cos\theta;\ 3\sin\theta;\ -1);\ \dot\gamma_-(\theta)=(-2\sin\theta;\ 3\cos\theta;\ 0)}$

γ_- non è compatibile con μ.

$\gamma_-:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}^3$

(1.6) Conviene o non conviene usare il Teo. di Stokes? Se lo utilizzo, ho:

$$\iint_{(\Sigma,\mu)} (\nabla\times G)\circ d\sigma = \int_{\gamma_+} G\circ dw - \int_{\gamma_-} G\circ dw =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (-9\sin\theta,\ 9\sin\theta,\ 1)\circ(-6\sin\theta;\ 9\cos\theta;\ 0)\,d\theta - \int_{-\pi}^{\pi}(-3\sin\theta,\ 3\sin\theta,\ -1)\circ(-2\sin\theta,\ 3\cos\theta,\ 0)\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\theta\,(54-6) + \sin\theta\cdot\cos\theta\,(81-9)\,d\theta = 48\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta = 48\cdot\pi$$

Se non lo utilizzo, calcolo $\nabla\times G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y & y & z \end{vmatrix} = (0,0,1),$

quindi $\displaystyle\iint_{(\Sigma,\mu)} (\nabla\times G)\circ d\sigma = + \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\cdot\int_1^3 dr\cdot(0,0,1)\circ(-3r\cos\theta,\ -2r\sin\theta;\ 6r)$

$$= 2\pi\cdot 6\cdot\int_1^3 r\,dr = 12\pi\cdot\left(\frac{r^2}{2}\right)_1^3 = 48\cdot\pi$$

Riutilizzo la parametrizzazione di Σ_2 in (1.2) e l'espressione dell'integrale su Σ_2 in (1.3), invertendo la normale e restringendo z a $[-1,1]$, quindi r a $[1,3]$.

$$\boxed{\iint_{\Sigma} (\nabla\times G)\circ\mu\, d\sigma = 48\pi.}$$

(2) Sia $F=(P,Q)$: $\partial_y P(x,y) = 2\cdot e^{\alpha x}\cdot \cos(2y) = \partial_x Q(x,y) = \alpha\cdot e^{2x}\cdot\cos(\alpha y)$

$$\Updownarrow$$

$\boxed{\alpha = 2}$: chiuso in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ esatto

$F(x,y) = \left(e^{2x}\cdot \sin(2y),\ 3 + e^{2x}\cdot\cos(2y)\right)$. Calcolo:

$$\int P(x,y)\,dx = \int e^{2x}\cdot \sin(2y)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin(2y) + c(y) = \varphi(x,y)$$

e $\partial_y \varphi(x,y) = e^{2x}\cdot\cos(2y) + c'(y) = Q(x,y) \Leftrightarrow c'(y) = 3 \Leftrightarrow c(y) = 3y + k$.

Un potenziale di F è $\boxed{\varphi(x,y) = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot\sin(2y) + 3y}$

(3) Meglio cambiare variabili: $\begin{cases} u = 3x - 2y \\ v = 2x + 3y \end{cases}$

$$\left|\det\left(J\begin{pmatrix} u & v \\ x & y\end{pmatrix}\right)\right| = \left|\det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3\end{pmatrix}\right| = 9 + 4 = 13 \Rightarrow \begin{aligned} du\cdot dv &= 13\cdot dx\,dy \\ dx\cdot dy &= \frac{1}{13}\cdot du\,dv\end{aligned}$$

$(x,y)\in A \Leftrightarrow |u| \le 1;\ |v|\le 1$. Quindi

$$\boxed{\iint_A e^{2x+3y}\,dx\,dy = \frac{1}{13}\cdot\int_{-1}^{1} du\cdot\int_{-1}^{1} dv\cdot e^{v} = \frac{2}{13}\left(e^{v}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{13}\cdot\left(e - e^{-1}\right)}$$

(4) Risolvo P.C. $\lambda^2 + 1 = 0$; $\lambda = \pm i$; I.G. $\begin{aligned}\xi(t) &= A\cdot\cos t + B\cdot \sin t \\ \dot\xi(t) &= -A\cdot\sin t + B\cdot\cos t\end{aligned}$

$x = \xi(0) = A$ e $y = \dot\xi(0) = B$: la soluzione è

$$\left\{\begin{aligned}\xi(t) &= x\cdot\cos t + y\cdot\sin t \\ \dot\xi(t) &= -x\cdot\sin t + y\cdot\cos t\end{aligned}\right| \Rightarrow \Phi_t(x,y) = (x\cdot\cos t + y\cdot\sin t;\ -x\cdot\sin t + y\cdot\cos t)$$

$$\boxed{J\Phi_t(x,y) = \begin{pmatrix}\cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}} \Rightarrow \det(J\Phi_t(x,y)) = 1.$$

Per il T. del cambiamento delle variabili negli integrali:

$$\iint_{\Phi_t(A)} f(u,v)\,du\,dv = \iint_A f(\Phi_t(x,y))\cdot\left|\det(J\Phi_t(x,y))\right|\,dx\,dy$$

Confrontando con il testo del problema, $\boxed{K = 1}$.

Prova scritta complessiva di Analisi Matematica II
Ingegneria Edile-Architettura, 2 febbraio 2011

Nome.......................................**Cognome**... **Matricola**................

Prova orale verso: *l'inizio* | *la fine* dell'appello; **non** nel *mattino* | *pomeriggio* del giorno (Cancellare la voce che non interessa).

(1) [**14 pti**] Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme $\Omega = \left\{ (x,y,z) : \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}} - 2 \le z \le 2, \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \ge 1 \right\}$.

(1.1) Fare un disegno *qualitativo* di Ω.

(1.2) Parametrizzare $\partial\Omega$ e dire se la parametrizzazioni scelte sono o meno compatibili con il campo ν normale a $\partial\Omega$ esternamente a Ω.

(1.3) Sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale. Scrivere *una* formula esplicita che dia il flusso $\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu d\sigma$ di F attraverso $\partial\Omega$.

(1.4) Calcolare il flusso di cui al punto (1.4) quando $F(x,y,z) = (xz, yz, z^2)$.

(1.5) . Sia $\Sigma = \left\{ (x,y,z) : \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}} - 2 = z, \ |z| \le 1 \right\}$. Parametrizzare $\partial\Sigma$ e dire se le parametrizzazioni scelte sono compatibili con la scelta μ della normale a Σ per cui $\mu = -\nu$ (ν essendo la normale di cui al punto (1.2)).

(1.6) Calcolare $\iint_{(\Sigma,\mu)} (\nabla \times G) \cdot d\sigma$, con $G \in C^1(\Sigma, \mathbb{R}^3)$, $G(x,y,z) = (-y, y, z)$.

$$= \iint_{\Sigma} (\nabla \times G) \cdot \mu \, d\sigma$$

(2) **[3 pti]** Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è esatto e, per quei valori, calcolarne il potenziale; dove

$$F(x,y) = \left(e^{\alpha x}\sin(2y), 3 + e^{2x}\cos(\alpha y)\right).$$

(3) **[4 pti]** Sia $A = \{(x,y) : \; |2x+3y| \le 1, \; |3x-2y| \le 1|\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\iint_A e^{2x+3y}\,dxdy.$$

(4) **[6 pti]** Classificare i punti critici di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 8x^3y + 8x^2y^2 + 2xy^3 - 6xy + 11$.

Pti critici: $(0,0)$ selle; $\pm(0,\sqrt{3})$ selle; $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ selle; $\pm\left(\sqrt{\frac{3}{32}}; 2\cdot\sqrt{\frac{3}{32}}\right)$ p.ti di min. rel.

(5) **[3 pti]** Trovare l'integrale generale di $\ddot{x}(t) - 4t\dot{x}(t) = 0$. (Se trovate una funzione integrale che non sapete come calcolare, lasciatela scritta come funzione integrale: il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale vi darà comunque le soluzioni desiderate).

$$x(t) = K\cdot\int_0^t e^{2\tau^2}\,d\tau + H; \quad x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$K, H \in \mathbb{R}$ costanti

(6) **[3 pti]** Sia $\Gamma = (\alpha, \beta, \gamma) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$. Consideriamo il cambiamento di variabili $(x,y,z) = \Phi(u,v,t) = (u,v,0) + \Gamma(t)$ (cioè, a (u,v,t) si associa il punto raggiunto dalla curva Γ al tempo t, traslato di un vettore $(u,v,0)$). Calcolare il determinante Δ della matrice Jacobiana di Φ e trovare una condizione su Γ affinché $\Delta(u,v,t) = 1$ per ogni scelta di (u,v,t) (cioè, che Φ conservi il volume, almeno "localmente").

$$\Delta(u,v,t) = \dot{\gamma}(t) \equiv 1 \iff \gamma(t) = t + K$$

$(K \in \mathbb{R}$, costante$)$.

AM2-100. Esercizi 1, 2, 3: come nei parziali.

(4) $\partial_x f(x,y) = 24x^2y + 16xy^2 + 2y^3 - 6y = 2y\cdot(12x^2 + 8xy + y^2 - 3)$

$\partial_y f(x,y) = 8x^3 + 16x^2y + 6xy^2 - 6x = 2x\cdot(4x^2 + 8xy + 3y^2 - 3)$

$\nabla f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x=0 \\ y^2=3 \end{cases}$ o $\begin{cases} 4x^2=3 \\ y=0 \end{cases}$ o $\begin{cases} 12x^2+8xy+y^2=3 \\ 4x^2+8xy+3y^2=3 \end{cases}$

$(0,0)$ $\quad (0, \pm\sqrt{3})$ $\quad (\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$

sottraggo:

$8x^2 - 2y^2 = 0$

$y = \pm 2x$

$\begin{cases} y = 2x \\ 4x^2 + 16x^2 + 12x^2 = 32x^2 = 3 \end{cases}$ o $\begin{cases} y = -2x \\ 4x^2 - 16x^2 + 12x^2 = 3 \end{cases}$

$0 = 3$ imp.

$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{3}{32}} \\ y = \pm 2\cdot\sqrt{\frac{3}{32}} \end{cases}$

$\boxed{\text{Punti critici: } (0,0);\ \pm(0,\sqrt{3});\ \pm(\tfrac{\sqrt{3}}{2},0);\ \pm\left(\sqrt{\tfrac{3}{32}}, \sqrt{\tfrac{3}{8}}\right)}$

$\partial_{xx} f(x,y) = 48xy + 16y^2 \qquad \partial_{xy} f(x,y) = 24x^2 + 32xy + 6y^2 - 6$

$\partial_{yy} f(x,y) = 16x^2 + 12xy$. Sia $H = \text{Hess } f$.

$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$ non def.; sella $\quad H(0,\pm\sqrt{3}) = \begin{bmatrix} * & 12 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$

$H(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}; 0) = \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 12 & * \end{bmatrix}$ $\Big\}$ non def. Pti di sella.

$H\left(\pm\sqrt{\frac{3}{32}}; \pm 2\cdot\sqrt{\frac{3}{32}}\right) = \frac{3}{32}\cdot\begin{bmatrix} 16\cdot 4 + 48\cdot 2 & 24 + 32\cdot 2 + 6\cdot 4 - 6 \\ * & 12\cdot 4 + 16\cdot 2 \end{bmatrix}$

$= \frac{3}{32}\cdot\begin{bmatrix} 160 & 106 \\ 106 & 80 \end{bmatrix}$ $\qquad \det H(\cdot) = \left(\frac{3}{32}\right)^2\cdot(160\cdot 80 - 106^2) > 0$

Def. pos. $\quad$ min. rel.

$\boxed{\text{Selle: } (0,0);\ \pm(0,\sqrt{3});\ \pm(\tfrac{\sqrt{3}}{2};0) \quad \text{Pti min rel. } \pm\left(\sqrt{\tfrac{3}{32}}; 2\sqrt{\tfrac{3}{32}}\right)}$

(5) Pongo $y = \dot{x}$: $\quad \dot{y} - 4ty = 0$: eq. lin. omog. del I ord.

Posso fare le variabili sep: $\quad \frac{dy}{y} = 4t\,dt$

$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 4t\,dt \iff \log|y| = 2t^2 + c_1 \iff y(t) = k e^{2t^2} \quad (k \in \mathbb{R})$.

Ho quindi $\quad \dot{x}(t) = k \cdot e^{2t^2}$

Integro: $\quad \boxed{x(t) = k \cdot \int_0^t e^{2\tau^2} d\tau + H \; ; \; x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad k, H \in \mathbb{R} \text{ costanti.}}$

(6) $\Phi(u, v, t) = (u + \alpha(t), v + \beta(t), \gamma(t))$.

$$J\Phi(u, v, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dot{\alpha}(t) \\ 0 & 1 & \dot{\beta}(t) \\ 0 & 0 & \dot{\gamma}(t) \end{pmatrix}$$

$\det(J\Phi(u, v, t)) = \dot{\gamma}(t)$: $\quad \Delta(u, v, t) = \dot{\gamma}(t)$

$\Delta \equiv 1 \iff \dot{\gamma}(t) = 1 \quad \forall t$

$\iff \gamma(t) = t + k \quad (k \in \mathbb{R})$