Prova scritta complessiva di Analisi Matematica II
Ingegneria Edile-Architettura, 19 gennaio 2011

Nome...**Cognome**... **Matricola**.................

Prova orale verso: *l'inizio* | *la fine* dell'appello; **non** nel *mattino* | *pomeriggio* del giorno (Cancellare la voce che non interessa).

(1) [**10 pti**] Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \leq 4, \ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + z^2 \geq 1, \ x \leq 0, \ |z| \leq 1 \right\}.$$

(1.1) Fare un disegno qualitativo di Ω.

(1.2) Parametrizzare $\partial\Omega$ e dire se la parametrizzazioni scelte sono o meno compatibili con il campo ν normale a $\partial\Omega$ esternamente a Ω.

(1.3) Sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale. Scrivere la formula che dà il flusso $\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu d\sigma$ di F attraverso Σ, dove

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 4, \ x \leq 0, \ |z| \leq 1 \right\}.$$

(1.4) . Calcolare il flusso $\iint_{\Sigma} F \cdot \nu d\sigma$ attraverso la Σ di cui al punto (1.3), con $F(x, y, z) = (x, y, 0)$.

(2) **[4 pti]** Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è esatto e, per quel valore, calcolarne il potenziale; dove

$$F(x,y) = \left(\pi - \frac{14x}{(x^2+y^2+1)^2}, \sqrt{2} - \frac{7\alpha y}{(x^2+y^2+1)^2}\right)$$

(3) **[4 pti]** Sia $A = \{(x,y) : \ 0 \leq y \leq (|x|-3)^2\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\iint_A e^{-4x} dxdy.$$

(4) **[8 pti]** Classificare i punti critici di $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = 81x^4 - 9x^2y^2 - 45x^2 + 4y^2$.

(5) **[4 pti]** Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + 25x = \sin(5t) \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

(6) **[3 pti]** Sia $F(r,\theta) = (2r\cos(\theta), 5r\sin(\theta))$, $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Siano inoltre $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $h = h(x,y)$, e $g(r,\theta) = h(F(r,\theta))$. Sapendo che $\frac{\partial g}{\partial \theta}(1,\pi) = \pi$ e $\frac{\partial g}{\partial r}(1,\pi) = e$, calcolare:

$$\frac{5}{2}x\frac{\partial h}{\partial y}(-2,0) - \frac{2}{5}y\frac{\partial h}{\partial x}(-2,0).$$

(**Suggerimento:** calcolare $\nabla g(r,\theta)$ può esservi d'aiuto.)

AM II - Prove Complessive

① Vedi lo svolgimento di ① nelle prove parziali, dove si ha anche l'espressione di $\iint_{\partial\Omega} F \circ \nu \, d\sigma$:

$$\iint_{\Sigma} F \circ \nu \, d\sigma = \iint_{\Sigma_3} F \circ \nu \, d\sigma = \iint_{A_3} F(6\cos\theta; 4\sin\theta; z) \circ (4\cos\theta; 6\sin\theta; 0) \, d\theta \, dz$$

② Vedi lo svolgimento delle prove parziali (altri parametri)

③ Vedi parziali (altri parametri)

④ $f(x,y) = 81 \cdot x^4 - 9 \cdot x^2 \cdot y^2 - 45 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2$

$\partial_x f(x,y) = 81 \cdot 4 \cdot x^3 - 9 \cdot 2 \cdot x \cdot y^2 - 45 \cdot 2 \cdot x = 18x(18x^2 - y^2 - 5)$

$\partial_y f(x,y) = -9 \cdot x^2 \cdot 2y + 4 \cdot 2y = 2y(4 - 9x^2)$

$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 5/18 \end{cases}$ o $\begin{cases} x^2 = 4/9 \\ y^2 = 3 \end{cases}$

P.ti critici: $(0,0)$; $\left(\pm\sqrt{\frac{5}{18}}, 0\right)$; $\left(\pm\frac{2}{3}; \pm\sqrt{3}\right)$ ce ne sono 7.

$$\text{Hess} f(x,y) = \begin{bmatrix} 18 \cdot (18x^2 - y^2 - 5) + 18^2 \cdot 2x^2 & -36xy \\ -36xy & 2 \cdot (4 - 9x^2) \end{bmatrix}$$

$\text{Hess} f\left(\pm\frac{2}{3}; \pm\sqrt{3}\right) = \begin{bmatrix} * & \mp 0 \\ \mp 0 & 0 \end{bmatrix}$ ha det. negativo: 4 p.ti di sella

$\text{Hess} f(0,0) = \begin{bmatrix} - & 0 \\ 0 & + \end{bmatrix}$ ha det. neg.: p.to di sella

$$\text{Hess} f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{18}}, 0\right) = \begin{bmatrix} 18^2 \cdot 2 \cdot \left(\pm\sqrt{\frac{5}{18}}\right)^2 & 0 \\ 0 & 2 \cdot \left(4 - 9 \cdot \frac{5}{18}\right) \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} + & 0 \\ 0 & + \end{bmatrix}$: autovalori positivi; p.ti di min. relativo.

$$\boxed{\begin{array}{l} (0,0);\ \pm\left(\frac{2}{3}, \sqrt{3}\right);\ \pm\left(\frac{2}{3}, -\sqrt{3}\right) : \text{p.ti di sella} \\ \pm\left(\sqrt{\frac{5}{18}}, 0\right) : \text{p.ti di minimo relativo.} \end{array}}$$

<u>NOTA</u>: alcune versioni sono diverse.

(5) $\ddot{z} + 25z = 0 \iff z(t) = A\cdot\cos(5t) + B\cdot\sin(5t) \quad A, B \in \mathbb{R}$

$z: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Risonanza: pongo $x(t) = t\cdot(E\cdot\cos(5t) + F\cdot\sin(5t))$

$\dot{x}(t) = E\cos(5t) + F\sin(5t) + 5t\cdot(-E\sin(5t) + F\cos(5t))$

$\ddot{x}(t) = -25t\cdot(E\cos(5t) + F\sin(5t)) + 10\cdot(-E\cdot\sin(5t) + F\cdot\cos(5t))$

Sostituendo e cancellando: ~~l'integrale generale~~:

$\sin(5t) = \ddot{x} + 25x = 10\cdot[-E\cdot\sin(5t) + F\cdot\cos(5t)]$

$\iff E = -1/10$; $F = 0$. L'integrale generale è:

$x(t) = A\cos(5t) + B\cdot\sin(5t) - \frac{1}{10}\cdot t\cdot\cos(5t)$.

$x(0) = 0 \iff A = 0$

$\dot{x}(0) = 0 \iff 5B - \frac{1}{10} = 0$

Allora: $\boxed{x(t) = \frac{1}{50}\cdot\sin(5t) - \frac{1}{10}t\cdot\cos(5t) \qquad x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$

(6) $\partial_r g(r,\theta) = \partial_x h(2r\cos\theta, 5r\sin\theta)\cdot 2\cos\theta + \partial_y h(2r\cos\theta, 5r\sin\theta)\cdot 5\sin\theta$

$\partial_\theta g(r,\theta) = \partial_x h(2r\cos\theta, 5r\sin\theta)\cdot(-2r\sin\theta) + \partial_y h(2r\cos\theta, 5r\sin\theta)\cdot 5r\cos\theta$

Poichè $x = 2r\cos\theta$ e $y = 5r\sin\theta$, ho che

$\partial_\theta g(r,\theta) = -\frac{2}{5}\cdot y\cdot\partial_x h(x,y) + \frac{5}{2}x\cdot\partial_y h(x,y)$

$(x,y) = (-2,0) \iff \theta = \pi$ e $r = 1$:

$$\boxed{\frac{5}{2}x\,\partial_y h(-2,0) - \frac{2}{5}y\,\partial_x h(-2,0) = \partial_\theta g(1,\pi) = \pi}$$

NOTA: la formulazione era forse ambigua.

A chi ha scritto:

$\frac{5}{2}x\,\partial_y h(-2,0) - \frac{2}{5}y\,\partial_x h(-2,0) = -\frac{\pi}{2}x + \frac{e}{5}y$

perchè $\partial_y h(-2,0) = -\pi/5$

e $\partial_x h(-2,0) = -e/2$

~~perchè $\partial_\theta g(1,\pi) = \frac{5}{2}\partial_y h(-2,0)$~~ ho dato punteggio pieno.