II prova parziale scritta di Analisi Matematica II
Ingegneria Edile-Architettura, 19 gennaio 2011

Nome..**Cognome**.. **Matricola**................

Prova orale verso: *l'inizio* | *la fine* dell'appello; **non** nel *mattino* | *pomeriggio* del giorno (Cancellare la voce che non interessa).

(1) **[18 pti]** Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \leq 4, \ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + z^2 \geq 1, \ y \geq 0, \ |z| \leq 1 \right\}.$$

(1.1) Fare un disegno qualitativo di Ω.

(1.2) Parametrizzare $\partial\Omega$ e dire se le parametrizzazioni scelte sono o meno compatibili con il campo ν normale a $\partial\Omega$ esternamente a Ω.

(1.3) Sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ una campo vettoriale. Scrivere *una* formula che dà il flusso $\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu d\sigma$ di F attraverso $\partial\Omega$.

(1.4) Calcolare il flusso $\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu d\sigma$ di cui al punto (1.3) per $F(x, y, z) = (x, y, 0)$.

(1.5) Calcolare il flusso $\iint_{\Sigma} F \cdot \nu d\sigma$ della F di cui al punto (1.4) attraverso Σ,

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 4,\ y \geq 0,\ |z| \leq 1 \right\}.$$

(2) [6 pti] Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è esatto e, per quel valore, calcolarne il potenziale; dove

$$F(x, y) = \left(5 - \frac{12x}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, 3 - \frac{6\alpha y}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \right)$$

$|x| \leq 7$

(3) [9 pti] Sia $A = \left\{ (x, y) : 0 \leq y \leq (|x| - 7)^2 \right\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

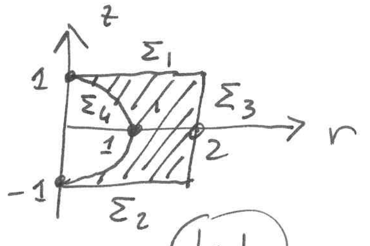
$$\iint_A e^{-4x} dx dy.$$

AM II – 2° Parziale (L

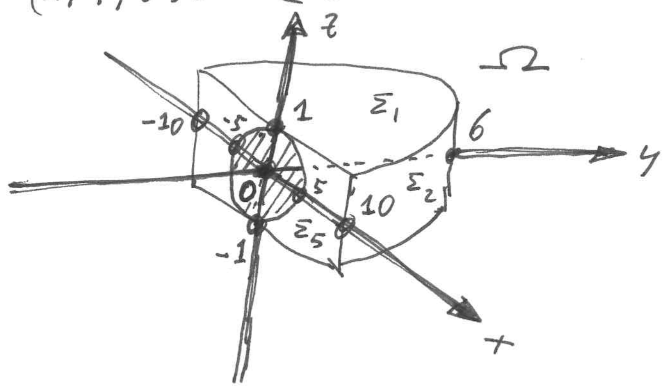
(1) $\Omega = \{(x,y,z): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \le 4;\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + z^2 \ge 1;\ y \ge 0;\ |z| \le 1\}$

In coordinate cilindriche $x = 5r\cos\theta;\ y = 3r\sin\theta;\ z = z$ $\begin{cases} r \ge 0 \\ |\theta| \le \pi \end{cases}$

$(x,y,z) \in \Omega \iff 0 \le \theta \le \pi;\ |z| \le 1;\ 0 \le r \le 2;\ r^2 + z^2 \ge 1.$



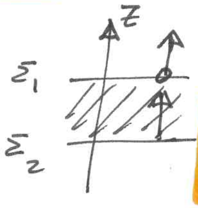
(1.1)



(1.2) $\boxed{\Sigma_1:\ A_1 = \{(x,y): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \le 4;\ y \ge 0\} \xrightarrow{\Phi_1} \mathbb{R}^3;\quad \Phi_1(x,y) = (x,y,1)}$

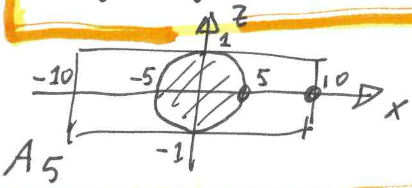
$\boxed{\Sigma_2:\ A_2 = A_1 \xrightarrow{\Phi_2} \mathbb{R}^3;\quad \Phi_2(x,y) = (x,y,-1)}$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x \Phi_1 \\ \partial_y \Phi_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x \Phi_2 \\ \partial_y \Phi_2 \end{vmatrix}$$



$\boxed{\Phi_1 \text{ è compatibile}}$
$\boxed{\Phi_2 \text{ non lo è}}$

$\boxed{\Sigma_5:\ A_5 = \{(x,z): |z| \le 1;\ \frac{x^2}{25} \le 4;\ \frac{x^2}{25} + z \ge 1\} \xrightarrow{\Phi_5} \mathbb{R}^3;\quad \Phi_5(x,z) = (x,0,z)}$



$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x \Phi_5 \\ \partial_z \Phi_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0,-1,0):\ \boxed{\Phi_5 \text{ è compatibile}}$$

$\boxed{\Sigma_3:\ A_3 = \{(\theta,z): 0 \le \theta \le \pi;\ |z| \le 1\} \xrightarrow{\Phi_3} \mathbb{R}^3;\quad \Phi_3(\theta,z) = (10\cdot\cos\theta;\ 6\sin\theta;\ z)}$

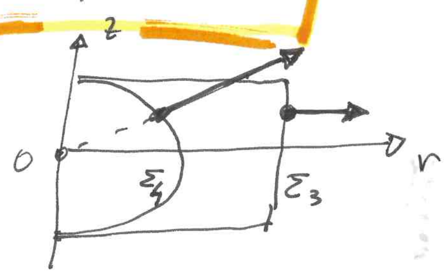
$$\partial_\theta \Phi_3 \times \partial_z \Phi_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -10\sin(\theta) & 6\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (6\cos\theta;\ 10\sin\theta;\ 0):\ \boxed{\Phi_3 \text{ è compatibile}}$$

$\boxed{\Sigma_4:\ A_4 = \{(\theta,z): 0 \le \theta \le \pi;\ |z| \le 1\} \xrightarrow{\Phi_4} \mathbb{R}^3;\quad \Phi_4(\theta,z) = (5\sqrt{1-z^2}\cdot\cos\theta;\ 3\sqrt{1-z^2}\cdot\sin\theta;\ z)}$

$$\partial_\theta \Phi_4 \times \partial_z \Phi_4 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -5\sqrt{1-z^2}\sin\theta & 3\sqrt{1-z^2}\cdot\cos\theta & 0 \\ -\frac{5z}{\sqrt{1-z^2}}\cos\theta & -\frac{3z\sin(\theta)}{\sqrt{1-z^2}} & 1 \end{vmatrix} = (3\sqrt{1-z^2}\cdot\cos\theta;\ 5\sqrt{1-z^2}\cdot\sin\theta;\ 15z)$$

$\boxed{\Phi_4 \text{ non è compatibile.}}$

(La compatibilità di Φ_4 si verifica osservando che la terza componente di $\partial_\theta \Phi_4 \times \partial_z \Phi_4$ ha lo stesso segno di z.
Quella di Φ_3 si vede, p.es., ponendo $\theta = 0$).



(1.3) Posso ricavare le formule col Teorema della divergenza:

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx\, dy\, dz.$$

Uso le coordinate cilindriche introdotte prima:

$$\left| \det J \begin{pmatrix} x & y & z \\ r & \theta & z \end{pmatrix} \right| = 5 \cdot 3 \cdot r = 15 \cdot r.$$

Usando il Teorema di riduzione per integrali tripli:

$$\boxed{\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma = \int_0^{\pi} d\theta \int_{-1}^{1} dz \left\{ \int_{\sqrt{1-z^2}}^{2} \operatorname{div} F(5r \cdot \cos\theta;\, 3r \sin\theta;\, z) \cdot 15 r \, dr \right\}.}$$

Se voglio un integrale scritto in termini di superfici:

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma = \iint_{A_1} F(x,y,1) \cdot (0,0,1)\, dx\, dy - \iint_{A_2} F(x,y,-1) \cdot (0,0,1)\, dx\, dy$$
$$+ \iint_{A_5} F(x,0,z) \cdot (0,-1,0)\, dx\, dz + \iint_{A_3} F(10 \cdot \cos\theta;\, 6 \sin\theta;\, z) \cdot (6 \cos\theta;\, 10 \sin\theta;\, 0)\, d\theta\, dz$$
$$- \iint_{A_4} F(5\sqrt{1-z^2} \cdot \cos\theta;\, 3\sqrt{1-z^2} \cdot \sin\theta;\, z) \cdot (3\sqrt{1-z^2} \cdot \cos\theta;\, 5 \cdot \sqrt{1-z^2} \cdot \sin\theta;\, 15 z)\, d\theta\, dz.$$

(Entrambe le scritture vanno bene).

(1.4) $F(x,y,z) = (x,y,0) \Rightarrow \operatorname{div} F(x,y,z) = 2$: uso la formula in (1.3):

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma = \int_0^{\pi} d\theta \cdot \int_{-1}^{1} dz \left\{ \int_{\sqrt{1-z^2}}^{2} 2 \cdot 15 r \, dr \right\} = \pi \cdot 15 \cdot \int_{-1}^{1} \left[r^2 \right]_{\sqrt{1-z^2}}^{2} dz$$

$$= 15 \cdot \pi \cdot \int_{-1}^{1} \left[4 - (1 - z^2) \right] dz = 15 \cdot \pi \cdot \left(6 + \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-1}^{1} \right) = 15 \cdot \pi \cdot \left(6 + \frac{2}{3} \right) = 100 \cdot \pi$$

Il flusso è quindi $\boxed{\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma = 100 \cdot \pi.}$

(1.5) $\Sigma = \Sigma_3$; quindi, per quanto visto in (1.2):

$$\iint_{\Sigma_3} F \cdot \nu \, d\sigma = \iint_{A_3} (10 \cdot \cos\theta;\, 6 \sin\theta;\, z) \cdot (6 \cos\theta;\, 10 \sin\theta;\, 0)\, d\theta\, dz$$

$$= \int_{-1}^{1} dz \int_0^{\pi} d\theta \cdot 60 \, d\theta\, dz = 60 \times 2 \times \pi = 120 \cdot \pi \,; \quad \boxed{\iint_{\Sigma} F \cdot \nu \, d\sigma = 120 \cdot \pi}$$

(2) $F = (P, Q)$: $P(x,y) = 5 - \dfrac{12 \cdot x}{(x^2+y^2+1)^2}$; $Q(x,y) = 3 - \dfrac{6\alpha y}{(x^2+y^2+1)^2}$

$$\partial_y P(x,y) = \frac{-12 \cdot x \cdot (-2) \cdot 2y}{(x^2+y^2+1)^3} \underset{\alpha = 2}{\overset{\Updownarrow}{=}} \partial_x Q(x,y) = \frac{-6 \cdot \alpha \cdot y \cdot 2x \cdot (-2)}{(x^2+y^2+1)}$$

F è esatto $\Leftrightarrow$ F è chiuso (perché è definito su $\mathbb{R}^2$) $\Leftrightarrow \alpha = 2$.

Calcolo un potenziale:

$$\varphi(x,y) = \int P(x,y)\,dx = 5x - 12 \int \frac{x}{(x^2+y^2+1)^2}\,dx$$

$$= 5x - 12 \cdot \frac{(x^2+y^2+2)^{-1}}{-2} + C(y) = 5x + 6\,(x^2+y^2+2)^{-1} + C(y)$$

e quindi $\partial_y \varphi(x,y) = \dfrac{-12 \cdot y}{(x^2+y^2+1)^2} + C'(y) \overset{\Updownarrow}{=} Q(x,y)$

$C(y) = 3y + k \Leftrightarrow C'(y) = 3$

I potenziali di F sono $\boxed{\varphi(x,y) = 5x + 3y + \dfrac{6}{x^2+y^2+1} + k \quad (k \in \mathbb{R})}$.

(3) $$\iint_A e^{-4x}\,dx\,dy = \int_{-7}^{7} e^{-4x} \left\{ \int_0^{(|x|-7)^2} dy \right\} dx = \int_{-7}^{7} e^{-4x} (|x|-7)^2\,dx$$

$$= \int_{-7}^{0} e^{-4x} (x+7)^2\,dx + \int_0^7 e^{-4x}(x-7)^2\,dx = \left[\frac{e^{-4x}}{-4} \cdot (x+7)^2\right]_{-7}^{0} - \int_{-7}^{0} \frac{e^{-4x} \cdot 2(x+7)}{-4}\,dx$$

$$+ \left[\frac{e^{-4x}}{-4} \cdot (x-7)^2\right]_0^7 - \int_0^7 \frac{e^{-4x}}{-4}\, 2(x-7)\,dx = \frac{7^2}{-4} - \frac{(-7)^2}{-4}$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-4x}}{-4}(x+7)\right]_{-7}^{0} - \frac{1}{2}\int_{-7}^{0} \frac{e^{-4x}}{-4}\,dx + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-4x}}{-4}(x-7)\right]_0^7 - \frac{1}{2}\int_0^7 \frac{e^{-4x}}{-4}\,dx$$

$$= -\frac{7}{8} - \frac{7}{8} + \frac{1}{8}\int_{-7}^{7} e^{-4x}\,dx = -\frac{7}{4} + \frac{1}{8}\left[\frac{e^{-4x}}{-4}\right]_{-7}^{7}$$

$$= \boxed{-\frac{7}{4} + \frac{1}{32} \cdot \left(e^{28} - e^{-28}\right)}$$