Teorema sulle derivate parziali di una composizione.

Siano $x^0 \in A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(A, \mathbb{R}^m)$, $g \in C^1(B, \mathbb{R}^p)$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $f(A) \subseteq B$.

Allora $g \circ f \in C^1(A, \mathbb{R}^p)$ e

(1) $J(g \circ f)(x^0) = Jg(f(x^0)) \cdot Jf(x^0)$

e

(2) per $i = 1, \dots, p$ e $j = 1, \dots, n$: $\dfrac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(x^0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x^0)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x^0)$

Dimostrazione. Proviamo (1). $(g \circ f)(x^0 + h) - (g \circ f)(x^0) =$

$= g(f(x^0 + h)) - g(f(x^0)) = Jg(f(x^0)) \cdot [f(x^0 + h) - f(x^0)] + E_1(f(x^0+h) - f(x^0))$

dove $E_1(k) = \underset{\substack{k \to 0 \\ \text{in } \mathbb{R}^m}}{o}(|k|)$, cioè $\dfrac{|E_1(k)|}{|k|} \underset{\substack{k \to 0 \\ \text{in } \mathbb{R}^m}}{\longrightarrow} 0$, perché

$g \in C^1(B, \mathbb{R}^p)$, quindi il Teorema sulla differenziabilità delle funzioni C^1 si applica.

$= Jg(f(x^0)) \cdot (Jf(x^0)h + E_2(h)) + E_1(f(x^0+h) - f(x^0))$

dove $E_2(h) = \underset{\substack{h \to 0 \\ \text{in } \mathbb{R}^n}}{o}(|h|)$ perché $f \in C^1(A, \mathbb{R}^m)$

$= Jg(f(x^0)) \cdot Jf(x^0) \cdot h + Jg(f(x^0)) \cdot E_2(h) + E_1(f(x^0+h) - f(x^0))$.

$= Jg(f(x^0)) \cdot Jf(x^0) \cdot h + E_3(h)$.

Ci basta mostrare che $E_3(h) = \underset{\substack{h \to 0 \\ \text{in } \mathbb{R}^n}}{o}(|h|)$ ~~per~~ per avere la tesi (1).

Lemma di algebra lineare. Se $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ è una matrice $n \times n$ e se pongo $\|A\| = \left(\displaystyle\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2\right)^{1/2}$, allora

$\forall h \in \mathbb{R}^n \Rightarrow |Ah| \le \|A\| \cdot |h|$.

Dim. del Lemma. Scrivo $A = \begin{bmatrix} {}^t a_1 \\ {}^t a_2 \\ \vdots \\ {}^t a_n \end{bmatrix}$. Allora

$Ah = \begin{bmatrix} \langle a_1, h \rangle \\ \langle a_2, h \rangle \\ \vdots \\ \langle a_n, h \rangle \end{bmatrix}$ così che $|Ah|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^n \langle a_i, h \rangle^2 \le$

$\le \displaystyle\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \cdot |h|^2$ (per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)

$= \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right) |h|^2 = \|A\|^2 \cdot |h|^2$ ■

Torniamo al termine d'errore $E_3(h)$.

Per il Lemma, $\dfrac{|Jg(f(x^0))\cdot E_2(h)|}{|h|} \le \|Jg(f(x^0))\|\cdot\dfrac{|E_2(h)|}{|h|} \underset{\substack{h\to 0\\ \text{in } \mathbb{R}^n}}{\longrightarrow} 0$

perché $E_2(h) = \underset{\substack{h\to 0\\ \text{in } \mathbb{R}^n}}{o(h)}$.

~~Per il cambiamento delle variabili nei limiti,~~ Ora:

$$\cancel{\lim_{\substack{h\to 0\\ \text{in } \mathbb{R}^n}}}\frac{|E_1(f(x^0+h)-f(x^0))|}{|h|} = \cancel{\lim_{\substack{h\to 0\\ \text{in } \mathbb{R}^m}}\frac{|E_1(k)|}{|k|}\cdot\lim_{\substack{h\to 0\\ \text{in } \mathbb{R}^n}}|f(x^0+h)-f(x^0)|}$$

$$= \frac{|E_1(f(x^0+h)-f(x^0))|}{|f(x^0+h)-f(x^0)|}\cdot\frac{|f(x^0+h)-f(x^0)|}{|h|} =$$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{|E_1(k)|}{|k|}\cdot\frac{|Jf(x^0)h+E_2(h)|}{|h|} \underset{\uparrow}{\le} \frac{|E_1(k)|}{|k|}\cdot\left(\|Jf(x^0)\|+\frac{|E_2(h)|}{|h|}\right)$$

$k = f(x^0+h)-f(x^0) \underset{h\to 0 \text{ in } \mathbb{R}^n}{\longrightarrow} 0$ in $\mathbb{R}^m$ per la continuità di f — per il Lemma

Per il Teorema sul cambiamento delle variabili nei limiti:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ \text{in } \mathbb{R}^n}}\frac{|E_1(f(x^0+h)-f(x^0))|}{|h|} \le \lim_{\substack{k\to 0\\ \text{in } \mathbb{R}^m}}\frac{|E_1(k)|}{|k|}\cdot\lim_{\substack{h\to 0\\ \text{in } \mathbb{R}^n}}\left(\|Jf(x^0)\|+\frac{|E_2(h)|}{|h|}\right)$$

$$= 0\cdot\|Jf(x^0)\| = 0,$$ come volevamo ■

__Nota__. Abbiamo dato per scontato che $f(x^0+h)-f(x^0)\neq 0$, ciò che potrebbe non essere. Per rimediare ~~dovremmo cambiare la definizione di o:~~ ~~$a(h) = o(h) \iff$~~ osserviamo che se $h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ è tale che $f(x^0+h)-f(x^0)=0$, allora $E_1(f(x^0+h)-f(x^0))=0$ senza ulteriori conti.

Verifichiamo (2) a partire da (1): $J(g\circ f)(x^0) = Jg(f(x^0))\cdot Jf(x^0)$

$$= \begin{bmatrix}\nabla g_1(f(x^0))\\ \hline \vdots \\ \hline \nabla g_p(f(x^0))\end{bmatrix}\cdot\left[\partial_{x_1}f(x^0)\,|\cdots|\,\partial_{x_n}f(x^0)\right] = \left[\nabla g_i(f(x^0))\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}f(x^0)\right]_{\substack{i=1\dots p\\ j=1\dots n}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(g\circ f)_i}{\partial x_j}(x^0) = \nabla g_i(f(x^0))\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}f(x^0) = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x^0))\cdot\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x^0)$$ ■

Esercizi sulle derivate parziali di composizioni.

(1) Siano $f, \alpha, \beta \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e sia $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$h(x,y) = f(\alpha(x,y), \beta(x,y)).$$

Calcolare $\nabla h(x_0,y_0)$ per $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ dato.

(2) Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ e sia $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h(x,y) = x \cdot f(xy, x, x^2y^3 + y)$$

Calcolare $\nabla h(x_0,y_0)$ per $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ dato e $\nabla h(1,0)$.

(3) Siano $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $\gamma \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e sia $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$h(x,y) = \int_{\gamma(x)}^{\gamma(y)} f(t)\, dt$$

Calcolare $\nabla h(x_0,y_0)$ per $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ dato.

(4) Sia $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione radiale (liscia): esiste $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tale che

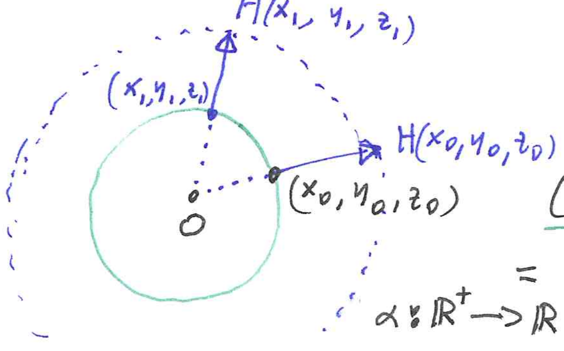
$$h(x,y,z) = \varphi(x^2+y^2+z^2).$$

Conoscendo φ, calcolare $\nabla h(x_0,y_0,z_0)$.

Inoltre, mostrare che il "campo vettoriale" $H = \nabla h$ è radiale. Cioè, mostrare che

(a) $|H(x_0,y_0,z_0)| = \Psi(x_0^2+y_0^2+z_0^2)$ per qualche funzione $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ (trovare Ψ!);

(b) $H(x_0,y_0,z_0) \parallel (x_0,y_0,z_0)$ $\forall (x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$: H è parallelo alla direzione uscente dall'origine.



(c) $\langle H(x_0,y_0,z_0), (x_0,y_0,z_0) \rangle = \alpha(x_0^2+y_0^2+z_0^2)$ per qualche $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ (trovarla).

(5) Sia $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ definita da

$$F(x) = \frac{x}{|x|}$$

Calcolare $JF(x^\circ)$, con $x^\circ \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(a) Verificare che $\partial_k F_j(x) \geq 0$ se $k = j$

(b) Scrivere $JF(x^\circ) = D + A$ dove D è una matrice diagonale e $A = e\,e^t$ con $e \in \mathbb{R}^n$ (colonna)

(c) Calcolare $\det JF(x^\circ)$. (FACOLTATIVO! So che $\det JF(x^\circ) \equiv 0$ per altri motivi, ma non so come fare il calcolo esplicitamente)

FARLO PER $n=2$

(d) Verificare che $JF(x^\circ)$ è simmetrica.

(6) Più in generale, sia $H : \mathbb{R}^n \cancel{\setminus\{0\}} \to \mathbb{R}^n$ definita da

$$H(x) = h(|x|^2) \cdot x$$

con $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Calcolare $JF(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$ e scrivere

$$JF(x) = D + k \cdot x\,{}^t x, \quad \text{dove } k = k(x) \text{ e } k \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

e D è diagonale.

(7) Siano $a \in \mathbb{R}^n$ fissato e sia $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Si ponga $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \varphi(\langle a, x \rangle).$$

Calcolare $\nabla h(x^\circ)$ per $x^\circ \in \mathbb{R}^n$ fissato e scrivere la formula di Taylor al I ordine per h.

(8) Sia $A = {}^t A$ una matrice simmetrica $n \times n$ e si ponga $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$k(x) = {}^t x\, A\, x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad \text{se } A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$$

(k è la forma quadratica associata ad A).

Calcolare $\nabla k(x^\circ)$ per $x^\circ \in \mathbb{R}^n$ e scrivere la corrispondente formula di Taylor al I ordine.

(1) $\nabla h(x_0,y_0)=\big(\partial_u f(\alpha(x_0,y_0),\beta(x_0,y_0))\cdot\partial_x\alpha(x_0,y_0)+\partial_v f(\alpha(x_0,y_0),\beta(x_0,y_0))\cdot\partial_x\beta(x_0,y_0),$
$\partial_u f(\alpha(x_0,y_0),\beta(x_0,y_0))\partial_y\alpha(x_0,y_0)+\partial_v f(\alpha(x_0,y_0),\beta(x_0,y_0))\cdot\partial_y\beta(x_0,y_0)\big)$
se $f=f(u,v)$.

(2) $\nabla h(x_0,y_0)=\big(f(x_0y_0,x_0,x_0^2y_0^3+y_0)+x_0y_0\,\partial_u f(x_0y_0,x_0,x_0^2y_0^3+y_0)$
$+x_0\,\partial_v f(x_0y_0,x_0,x_0^2y_0^3+y_0)+2x_0^2y_0^3\cdot\partial_z f(x_0y_0,x_0,x_0^2y_0^3+y_0);$
$x_0^2\partial_u f(x_0y_0,x_0,x_0^2y_0^3+y_0)+3x_0^3y_0^2\cdot\partial_z f(x_0y_0,x_0,x_0^2y_0^3+y_0)\big)$
se $f=f(u,v,z)$.

$\nabla h(1,0)=(f(0,1,0)+\partial_v f(0,1,0);\ \partial_u f(0,1,0))$

(3) $\nabla h(x_0,y_0)=(-f(\gamma(x_0))\cdot\dot\gamma(x_0);\ f(\gamma(y_0))\cdot\dot\gamma(y_0))$

(4) $H(x_0,y_0,z_0)=\nabla h(x_0,y_0,z_0)=2\cdot(x_0,y_0,z_0)\cdot\varphi'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)$

(a) $|H(x_0,y_0,z_0)|=2\cdot(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{1/2}\cdot|\varphi'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)|$, quindi
$\psi(t)=2\sqrt{t}\cdot|\varphi'(t)|$

(b) $H(x_0,y_0,z_0)=k\cdot(x_0,y_0,z_0)$ con $k=2\cdot\varphi'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)$, quindi
$H(x_0,y_0,z_0)\parallel(x_0,y_0,z_0)$

(c) $\langle H(x_0,y_0,z_0);(x_0,y_0,z_0)\rangle=2\cdot(x_0^2+y_0^2+z_0^2)\cdot\varphi'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)$,
quindi $\alpha(t)=2t^2\cdot\varphi'(t)$.

(5) $F_j(x)=\dfrac{x_j}{|x|}=\dfrac{x_j}{(x_1^2+\dots+x_n^2)^{1/2}}\Rightarrow\partial_k F_j(x)=\begin{cases}\text{se } k=j: & \dfrac{1}{|x|}-\dfrac{x_j^2}{|x|^3}\\ \text{se } k\neq j: & -\dfrac{x_k x_j}{|x|^3}\end{cases}$

Quindi

$\partial_k F_k(x^0)=\dfrac{1}{|x^0|}-\dfrac{x_k^{0\,2}}{|x^0|^3}=\dfrac{|x^0|^2-(x_k^0)^2}{|x^0|^3}=\dfrac{\sum_{j\neq k}(x_j^0)^2}{|x^0|^3}\geq 0$ (ciò prova (a))

mentre $\partial_k F_j(x^0)\underset{\text{se } k\neq j}{=}-\dfrac{x_k x_j}{|x|^3}$.

$$JF(x^0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{|x^0|} - \frac{x_1^{0\,2}}{|x^0|^3} & -\frac{x_1^0 x_2^0}{|x^0|^3} & \cdots & -\frac{x_1^0 x_n^0}{|x^0|^3} \\ -\frac{x_1^0 x_2^0}{|x^0|^3} & \frac{1}{|x^0|} - \frac{x_2^{0\,2}}{|x^0|^3} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{x_1^0 x_n^0}{|x^0|^3} & -\frac{x_2^0 x_n^0}{|x^0|^3} & \cdots & \frac{1}{|x^0|} - \frac{x_n^{0\,2}}{|x^0|^3} \end{bmatrix} =$$

← è simmetrica ciò prova (d)

$$= \frac{1}{|x^0|} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{|x^0|^3} \begin{bmatrix} x_1^{0\,2} & x_1^0 x_2^0 & \cdots & x_1^0 x_n^0 \\ x_1^0 x_2^0 & x_2^{0\,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ x_1^0 x_n^0 & \cdots & & x_n^{0\,2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{|x^0|} Id_n - \frac{1}{|x^0|^3} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

$$= \frac{1}{|x^0|} \cdot Id_n - \frac{x^0}{|x_0|^{3/2}} \cdot {}^t\!\left(\frac{x^0}{|x_0|^{3/2}}\right)$$: in (b) abbiamo $D = \frac{1}{|x^0|} Id_n$, dove Id_n è la matrice identica, e $e = \frac{x^0}{|x_0|^{3/2}}$.

(6) $JH(x) = h(|x|^2) \cdot Id_n + 2h'(|x|^2) \cdot x\,{}^t x$

(7) Poiché $\frac{\partial}{\partial x_j} \langle a, x \rangle = \frac{\partial}{\partial x_j} (a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n) = a_j$,

ho che $\nabla \langle a, x \rangle = {}^t a$, quindi

$$\nabla h(x^0) = \varphi'(\langle a, x^0 \rangle)\, {}^t a$$

La formula di Taylor al I ordine è:

$$h(x^0 + v) = h(x^0) + \varphi'(\langle a, x^0 \rangle) \langle a, v \rangle + \underset{\substack{v \to 0 \\ \text{in } \mathbb{R}^n}}{o(v)}$$

(8) $\nabla k(x^0) = 2\, {}^t x^0 A$; da cui

$$k(x^0 + v) = k(x^0) + 2\, {}^t x^0 A v + \underset{\substack{v \to 0 \\ \text{in } \mathbb{R}^n}}{o(v)}$$

Infatti, in altro modo, $k(x^0 + v) = {}^t(x^0 + v) A (x^0 + v) =$
$= {}^t x^0 A x^0 + {}^t v A x^0 + {}^t x^0 A v + {}^t v A v = {}^t x_0 A x_0 + 2 \cdot {}^t x_0 A v + {}^t v A v$.