(A)- Classificare i punti critici delle seguenti funzioni

(A1) $f(x,y) = x \cdot y \cdot (1-x-y) + 2$

(A2) $f(x,y) = (y-1)\cdot(y-2)\cdot(y-x^2)+1$

(A3) $f(x,y) = (x^2-y^2)\cdot(x^2+y^2-1)-2$

(A4) $f(x,y) = (x^2-4)\cdot(x^2-1-y^2)+3$

(A5) $f(x,y) = (x\cdot y-1)\cdot[(y-x)^2-4]-4$

(A6) $f(x,y) = x\cdot e^{-x^2-y^2}+2$

(A7) $f(x,y) = x\cdot y\cdot\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1\right)-5$

(A8) $f(x,y,z) = (x^2+y^2-1)(z^2-1)+1$

(A9) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2-1)\cdot x \cdot -3$

(A10) $f(x,y) = y(y-2)[(y-1)^2-x^2]+7$

(B) Per le seguenti funzioni $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ e punti $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ calcolare (I) lo sviluppo di Taylor al II ordine di f in (x_0,y_0); (II) l'equazione del piano tangente a grafico(f) in $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$; (III) l'equazione dello spazio vettoriale tangente al grafico di f in $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

(B1) $f(x,y) = 1+x-2y+x^2-2xy+x^3-xy^2+x^4$ $\quad(x_0,y_0)=(0,0)$

(B2) $f(x,y) = 3-2x+5y$ $\quad(x_0,y_0)=(1,2)$

(B3) $f(x,y) = xe^{xy}+3$ $\quad(x_0,y_0)=(0,1)$

(B4) $f(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$ con $\varphi\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$; (x_0,y_0) qualsiasi.

(B5) $f(x,y) = x\cdot y\cdot(1-x-y)+2$ $\quad(x_0,y_0)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Soluzioni o cenni di soluzioni.

(A1) $(0,0), (0,1), (1,0)$ sono p.ti di sella; $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ è p.to MAX. rel.

(A2) $(\pm 1, 1)$ e $(\pm\sqrt{2}, 2)$ sono p.ti di sella; $\left(0, \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}\right)$ sono p.ti di estremante relativo (classificarli!)

(A3) P.ti sella: $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $(0,0)$ [5 p.ti]

$\left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ p.ti MAX/min relativo (classificarli!)

(A4) Sette punti critici: $(0,0)$, $(\pm 2, \pm\sqrt{3})$, $\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, 0\right)$.

I p.ti sella sono $(0,0)$ e le soluzioni di $\begin{cases} x^2 = 4 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$

(A5) Sette punti critici, di cui sono p.ti di sella $(0,0)$ e le soluzioni di $\begin{cases} y - x = \pm 2 \\ xy = 1 \end{cases}$.

I punti di estr. relativo soddisfano $x + y = 0$.

(A6) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$: MAX. rel; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$: min. rel.

(A7) Nove p.ti critici. Quelli di sella risolvono $\begin{cases} x \cdot y = 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$

(A8) $(0,0,0)$ è p.to MAX. rel.

(A9) Due p.ti critici (estremanti relativi): $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0\right)$

(A10) Sette p.ti critici, di cui sono di sella:

$(\pm 1, 0)$, $(0,1)$, $(\pm 1, 2)$.

(B4) $\nabla f(x_0, y_0) = 2(x_0, y_0) \cdot \varphi'(x_0^2 + y_0^2)$

$$\operatorname{Hess} f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 2\varphi'(x_0^2+y_0^2) + 4x_0^2 \cdot \varphi''(x_0^2+y_0^2) & 4x_0 y_0 \varphi''(x_0^2+y_0^2) \\ 4x_0 y_0 \varphi''(x_0^2+y_0^2) & 2\varphi'(x_0^2+y_0^2) + 4y_0^2 \varphi''(x_0^2+y_0^2) \end{bmatrix}$$

Ciò sapendo, il resto è routine.