EQUAZIONI DIFFERENZIALI A VARIABILI SEPARABILI.

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy, individuando quando possibile il dominio delle soluzioni.

(1) $\begin{cases} \dot{x} = \frac{2}{3}\frac{t}{x^2} \\ x(0)=1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \dot{x} = \frac{2}{3}\frac{t}{x^2} \\ x(0)=1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dot{x} = 2t\cdot\cos^2(x) \\ x(0)=\frac{\pi}{2} \end{cases}$ (4) $\begin{cases} \dot{x} = 2t\cdot\cos^2(x) \\ x(0)=\frac{\pi}{4} \end{cases}$ (5) $\begin{cases} \dot{x} = 2t\cdot\cos^2(x) \\ x(0)=-\frac{3}{4}\pi \end{cases}$

(6) $\begin{cases} \dot{x} = \frac{2t-1}{2x-3} \\ x(0)=1 \end{cases}$ (7) $\begin{cases} \dot{x} = \frac{2t-1}{2x-3} \\ x(0)=3 \end{cases}$

(8) $\begin{cases} \dot{x} = \frac{2t-2}{2x-3} \\ x(0)=1 \end{cases}$ (9) $\begin{cases} \dot{x} = \frac{2t-2}{2x-3} \\ x(0)=3 \end{cases}$

(10) $\begin{cases} \dot{x} = (1-x^2) \\ x(0)=1 \end{cases}$ (11) $\begin{cases} \dot{x} = 1-x^2 \\ x(0)=-1 \end{cases}$ (12) $\begin{cases} \dot{x} = 1-x^2 \\ x(0)=\alpha\in(-1,1) \end{cases}$

Createvi i vostri esercizi.

(i) Scegliete funzioni Φ, Ψ con Φ facile da invertire.

(ii) Scegliete ~~costanti~~ $t_0 \in$ Dominio(Ψ)

(iii) Partite da $\Phi(x) = \Psi(t)$

Supponendo $x = x(t)$: $\Phi'(x)\,\dot{x} = \Psi'(t)$ $\dot{x} = \frac{\Psi'(t)}{\Phi'(x)}$ è l'equazione

Se x_0 è soluzione di $\Phi(x_0) = \Psi(t_0)$, $x(t_0)=x_0$ è il dato iniziale.

Esempio. Parto da (*) $x^2-2x = e^t$

e $t_0=1$, $x_0^2-2x_0 = e$ $x_0 = 1\pm\sqrt{1+e}$

Diciamo $x_0 = 1-\sqrt{1+e}$.

Derivo (*): $(2x-2)\dot{x} = e^t$

Ottengo il problema di Cauchy:

(13) $\begin{cases} \dot{x} = \frac{e^t}{2x-2} \\ x(1)=1-\sqrt{1+e} \end{cases}$

Le soluzioni le ricavo da (*):

$x^2-2x-e^t=0$

$x = 1\pm\sqrt{1+e^t}$

Poiché $x(1) = 1\pm\sqrt{1+e}$

ho $x(t) = 1-\sqrt{1+e^t}$. $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

(1) $x(t) = \sqrt[3]{t^2+1}$ Dominio$(x) = \mathbb{R}$

(2) $x(t) = \sqrt[3]{t^2-1}$ Dominio$(x) = (-1,1)$

(3) $x(t) = \frac{\pi}{2}$ Dominio$(x) = \mathbb{R}$

(4) $x(t) = \operatorname{arctg}(t^2+1)$ Dominio$(x) = \mathbb{R}$

(5) $x(t) = \operatorname{arctg}(t^2+1) - \pi$ Dominio$(x) = \mathbb{R}$

(6) $x(t) = \dfrac{3-(1+4t^2-4t)^{1/2}}{2} = 1+t$ Dominio$(x) = \mathbb{R}$, ma si osservi che per $t = +\frac{1}{2}$, $x(+\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$ e l'equazione in (6) non ha più senso.

(7) $x(t) = \dfrac{3+(1+4t^2-4t)^{1/2}}{2} = 2-t$ Dominio$(x) = \mathbb{R}$, ma $t = \frac{1}{2}$ è ancora problematico.

(8) $x(t) = \dfrac{3-(1+4t^2-8t)^{1/2}}{2}$ Dominio$(x) = \left(-\infty, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$

(9) $x(t) = \dfrac{3+(1+4t^2-8t)^{1/2}}{2}$ Dominio$(x) = \left(-\infty, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$

(10) $x(t) = 1$ Dominio$(x) = \mathbb{R}$

(11) $x(t) = -1$ Dominio$(x) = \mathbb{R}$

(12) Svolgimento: l'equazione è $\dfrac{\dot{x}}{1-x^2} = 1$; integrando su $[0,t]$:

$$t = \int_0^t 1\,ds = \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{1-x(s)^2}\,ds = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dy}{1-y^2} = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log|1+y| - \log|1-y|\right)_{x(0)}^{x(t)} = \left(\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right|\right)_\alpha^{x(t)} = \left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right)_\alpha^{x(t)}$$

perché $-1 < \alpha < 1$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{1+x(t)}{1-x(t)} - \frac{1}{2}\log\frac{1+\alpha}{1-\alpha}.$$ Quindi $\dfrac{1+x(t)}{1-x(t)} = \dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\cdot e^t$

e usandosi $\dfrac{1+x}{1-x} = y \iff 1+x-y+xy = 0 \iff x = \dfrac{y-1}{1+y}$

otteniamo $x(t) = \dfrac{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}e^t - 1}{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}e^t + 1}$, Dominio$(x) = \mathbb{R}$.

(13) Svolgo: $\underbrace{\int_1^t e^s\,ds}_{e^t - e} = \int_1^t \dot{x}(s)(2x(s)-2)\,ds \int_{x(1)}^{x(t)}(2y-2)\,dy = (y^2-2y)_{x(1)}^{x(t)} = x(t)^2 - 2x(t) - (x(1)^2 - 2x(1))$

$\Rightarrow x(t)^2 - 2x(t) - e^t = 0$ $\boxed{x(t) = 1 \pm \sqrt{1+e^t}}$ $\boxed{x(t) = 1 - \sqrt{1+e^t}}$ $= x(t)^2 - 2x(1) \cancel{1+1+e}$