Esercizi sugli estremanti vincolati.

① Trovare gli estremanti di $f(x,y) = e^{x} \cdot y$ su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1;\ 0 \leq y \leq 1\}$

② Trovare gli estremanti di $f(x,y) = x \cdot y$ su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2-1)(x^2-4) - \frac{36}{5} \leq y \leq 0\}$.

③ Trovare gli estremanti di $f(x,y) = \cos(x \cdot y)$ su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{9}{\cancel{4}} \pi^2\}$.

Test di prova per il parziale del 26/11/2012

① Classificare i punti critici di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = (x^2 + y^2 - 4) \cdot (x^2 - 1) + 3$$

② Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = xy^2 + 2xy.$$

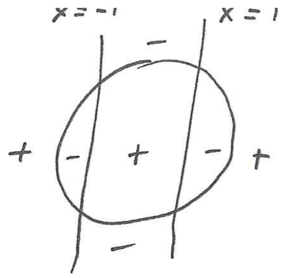
Scrivere la formula di Taylor al II ordine per g in $(x,y) = (1,-1)$.

Scrivere le equazioni di piano tangente al grafico, differenziale, di spazio tangente al grafico di g in $(x,y) = (1,-1)$.

③ Trovare l'integrale generale di $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = f(t)$ dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua

④ Trovare massimo e minimo di $f(x,y) = y \cdot \cos(x)$ su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq \sin(x) + 1,\ 0 \leq x \leq \pi\}$

Svolgimento del Test di Prova.



... segno di $f-3$

① $f_x = 2x(x^2-1) + (x^2+y^2-4)\cdot 2x$

$f_y = 2y\cdot(x^2-1)$

$\nabla f(x,y)=0 \iff \begin{cases} y=0 \\ 2x\cdot(2x^2-5)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=0 \\ x=0 \text{ o } x=\pm\sqrt{5/2} \end{cases}$

o

$\begin{cases} x^2=1 \\ y^2-3=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm\sqrt{3} \end{cases}$

P.ti critici:

$\underbrace{(0,\sqrt{5/2}),\ (0,-\sqrt{5/2})}_{\text{p.ti min rel}},\ \underbrace{(0,0)}_{\text{p.to max rel}}$

$\underbrace{(1,\sqrt{3})\ (-1,\sqrt{3})\ (1,-\sqrt{3})\ (-1,-\sqrt{3})}_{\text{p.ti di sella}}$

② $g(x,y)=xy^2+2xy$; $\nabla g(x,y)=(y^2+2y,\ 2xy+2x)$; $\text{Hess}\, g(x,y)=\begin{pmatrix} 0 & 2y+2 \\ 2y+2 & 2x \end{pmatrix}$

$g(1,-1)=-1$ $\qquad \nabla g(1,-1)=(-1,0)$ $\qquad \text{Hess}\, g(1,-1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$g(1+h,-1+k)=-1-h+\frac{1}{2}k^2+o(h^2+k^2)$
$(h,k)\to(0,0)$ in $\mathbb{R}^2$

Piano Tg: $z+1=-(x-1)$

Spazio Tg: $z=-x$ $\qquad$ Differenziale: $z=dg(1,-1)\binom{x}{y}=-x$

③ $\ddot{z}-2\dot{z}+2z=0$

$\lambda^2-2\lambda+2=0 \iff \lambda-1=-1=i^2$
$\quad \shortparallel$
$(\lambda-1)^2+1 \qquad \iff \lambda=1\pm i$

$z(t)=e^t(A\cos t+B\sin t)$

Metodo delle costanti arbitrarie: $x(t)=e^t(A(t)\cos t+B(t)\sin t)$

$\dot{x}(t)=\dot{A}(t)e^t\cos t+\dot{B}(t)e^t\sin t+e^tA(t)(\cos t-\sin t)+e^tB(t)(\sin t+\cos t)$

pongo $\boxed{(\dot{A}(t)\cos t+\dot{B}(t)\sin t)e^t=0}$ I

$\ddot{x}(t)=\dot{A}(t)e^t(\cos t-\sin t)+\dot{B}(t)e^t(\sin t+\cos t)+A(t)e^t(-2\sin t)+B(t)e^t(2\cos t)$

$x=x(t)$ è soluzione sse II $\boxed{\dot{A}(t)e^t(\cos t-\sin t)+\dot{B}(t)e^t(\sin t+\cos t)=f(t)}$

Divido (I) per e^t:

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ e^t(\cos t-\sin t) & e^t(\sin t+\cos t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot A\\ \dot B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ f\end{pmatrix} \iff \dot A = \frac{\begin{vmatrix}0 & \sin t\\ f & e^t(\sin t+\cos t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos t & \sin t\\ e^t(\cos t-\sin t) & e^t(\sin t+\cos t)\end{vmatrix}} =$$

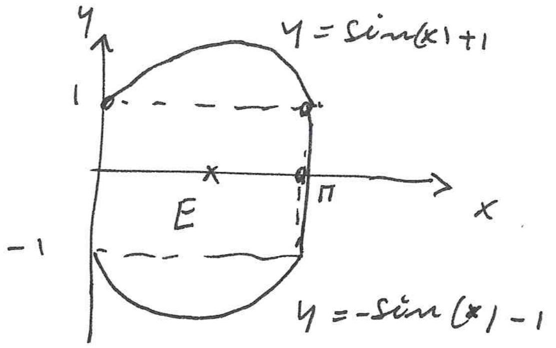
$$= \frac{-f(t)\sin t}{e^t} \quad e \quad \dot B(t) = \frac{f(t)\cos t}{e^t}.$$

$$A(t) = -\int_0^t e^{-s}\sin(s) f(s)\,ds + P \quad e \quad B(t) = \int_0^t e^{-s}\cos(s) f(s)\,ds$$

$$\boxed{x(t) = -e^t\cos(t)\int_0^t e^{-s}\sin(s)f(s)\,ds + e^t\sin(t)\int_0^t e^{-s}\cos(s)f(s)\,ds + e^t(P\cos(t)+Q\sin(t))}$$

è l'integrale generale.

(4)



$\nabla f(x,y) = \cancel{\cos(x)}\,(-y\sin(x), \cos(x))$

p.ti critici in $\mathbb{R}^2$: $y=0$, $x = \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

p.ti critici in E: $(\frac{\pi}{2}, 0)$

$\boxed{f(\frac{\pi}{2}, 0) = 0}$

Considero $f(x,y)$ con $x=0$, $-1\le y\le 1$: $f(0,y) = y$

$\boxed{f(0,1) = 1}$, $\boxed{f(0,-1) = -1}$

Considero $f(x,y)$ con $x=\pi$; $-1\le y\le 1$: $f(\pi,y) = -y$

$\boxed{f(\pi,1) = -1}$ $\boxed{f(\pi,-1) = 1}$

Considero $f(x,y)$ con $g(x,y) = \sin(x)+1-y$; $0\le x\le\pi$: uso i moltiplicatori di Lagrange.

$0 = f_x - \lambda g_x = -y\sin x - \lambda\cos x$

$0 = f_y - \lambda g_y = \cos x + \lambda$

$\sin(x)+1-y = 0$

$\lambda = -\cos x$

$y = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$

$0 = \sin(x)+1-\frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{\sin^2(x)+\sin(x)-\cos^2(x)}{\sin(x)}$

$= \frac{2\sin^2(x)+\sin(x)-1}{\sin(x)}$

$\sin(x) = -1, \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\cos(x) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{3}{2}$ $\boxed{f = \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}}$

no perché $0\le x\le\pi$

Considero $f(x,y)$ con $h(x,y) = \sin(x)+1+y$; $0 \le x \le \pi$.

$$\begin{cases} 0 = f_x - \lambda h_x = -y\sin x - \lambda\cos x \\ 0 = f_y - \lambda h_y = \cos x - \lambda \\ \sin(x) + 1 + y = 0 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{aligned} &\lambda = \cos x \\ &y = -\frac{\cos^2 x}{\sin x} \\ &0 = \sin x + 1 - \frac{\cos^2 x}{\sin x} \end{aligned} \right.$$

come sopra.

Poiché $\frac{3\sqrt{3}}{4} > 1$, $\boxed{\max_E f = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ e } \min_E f = -\frac{3\sqrt{3}}{4}}$