Prova scritta complessiva di Analisi Matematica II
Ingegneria Edile-Architettura, 15 giugno 2011

CORREZIONE

Nome..**Cognome**... **Matricola**................

Prova orale verso: *domani* | *dopo il* 3 *luglio*.
(Cancellare la voce che non interessa).

(1) [14 pti] Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme $\Omega = \left\{(x,y,z) : \sqrt{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}} - 1 \le z \le 2,\ z \ge 0\right\}$. **(1.1)**Fare un disegno *qualitativo* di Ω.

(1.2) Parametrizzare $\partial\Omega$ e dire se la parametrizzazioni scelte sono o meno compatibili con il campo ν normale a $\partial\Omega$ esternamente a Ω.

(1.3) Sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale. Scrivere *una* formula esplicita che dia il flusso $\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu d\sigma$ di F attraverso $\partial\Omega$.

(1.4) Calcolare il flusso di cui al punto (1.4) quando $F(x,y,z) = (y, -x, \cancel{z}e^{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}}\cancel{)}(z^2+2z))$

(1.5) . Sia $\Sigma = \left\{(x,y,z) : \sqrt{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}} - 1 = z,\ |z| \le 1\right\}$. Parametrizzare $\partial\Sigma$ e dire se le parametrizzazioni scelte sono compatibili con la scelta μ della normale a Σ per cui $\mu = -\nu$ (ν essendo la normale di cui al punto (1.2)).

Prova scritta complessiva di Analisi Matematica II ~~EA~~
Ingegneria Edile-Architettura, 15 giugno 2011

Nome..**Cognome**.. **Matricola**................

Prova orale verso: *domani* | *dopo il* 3 *luglio*.
(Cancellare la voce che non interessa).

(1) **[14 pti]** Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme $\Omega = \left\{(x,y,z) : \sqrt{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}}-1 \le z \le 2,\ z \ge 0\right\}$. **(1.1)**Fare un disegno *qualitativo* di Ω.

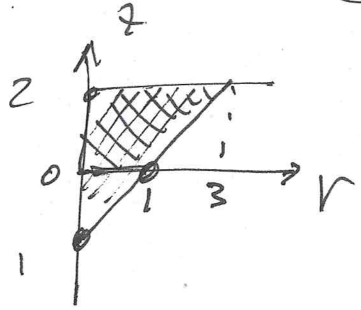
(1.2) Parametrizzare $\partial\Omega$ e dire se la parametrizzazioni scelte sono o meno compatibili con il campo ν normale a $\partial\Omega$ esternamente a Ω.

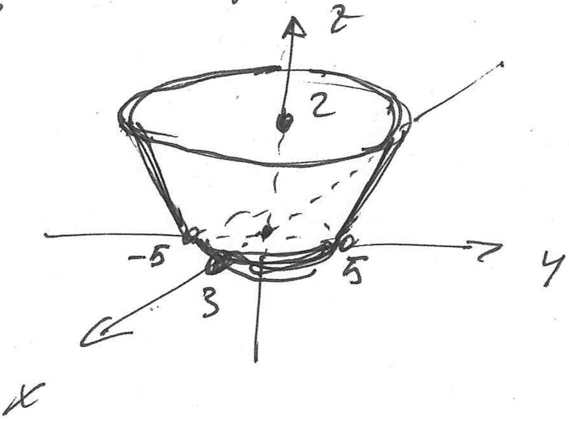
(1.3) Sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale. Scrivere *una* formula esplicita che dia il flusso $\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu d\sigma$ di F attraverso $\partial\Omega$.

(1.4) Calcolare il flusso di cui al punto (1.4) quando $F(x,y,z) = (y, -x, ze^{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}})$.

(1.5) . Sia $\Sigma = \left\{(x,y,z) : \sqrt{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}}-1 = z,\ |z| \le 1\right\}$. Parametrizzare $\partial\Sigma$ e dire se le parametrizzazioni scelte sono compatibili con la scelta μ della normale a Σ per cui $\mu = -\nu$ (ν essendo la normale di cui al punto (1.2)).

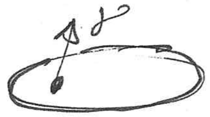
(1.1) $\begin{cases} \frac{x}{3} = r\cos\theta \\ \frac{y}{5} = r\sin\theta \end{cases}$ $\quad r \geq 0, \ |\theta| \leq \pi$ $\qquad r-1 \leq z \leq 2, \ z \geq 0$





(1.2) $\Phi_1(x,y) = (x,y,2)$; $\Phi_1 : A_1 \to \mathbb{R}^3$; $A_1 = \{(x,y) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \leq 9\}$

$(\partial_x \Phi_1 \times \partial_y \Phi_1)(x,y) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1)$, compatibile.



$\Phi_2(x,y) = (x,y,0)$; $\Phi_2 : A_2 \to \mathbb{R}^3$; $A_2 = \{(x,y) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \leq 4\}$

$(\partial_x \Phi_2 \times \partial_y \Phi_2)(x,y) = (0,0,1)$: non compatibile.

$\Phi_3(r,\theta) = (3r\cos\theta, 5r\sin\theta, r-1)$; $\Phi_3 : A_3 \to \mathbb{R}^3$; $A_3 = [1,3] \times [-\pi,\pi]$

$(\partial_r \Phi_3 \times \partial_\theta \Phi_3)(r,\theta) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3\cos\theta & 5\sin\theta & 1 \\ -3r\sin\theta & 5r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$

$= (-5r\cos\theta, -3r\sin\theta, 15r)$

non compatibile

(1.3) Scelgo di usare il Teorema della divergenza e coordinate cilindriche: $0 \leq z \leq 2$; $|\theta| \leq \pi$; $0 \leq r \leq z+1$

$\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div}F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 dz \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{z+1} 15 \cdot r\,dr \cdot \operatorname{div}F(3r\cos\theta, 5r\sin\theta, z)$

dove $\operatorname{div}F(x,y,z) = (\partial_x P + \partial_y Q + \partial_z R)(x,y,z)$, se $F = (P,Q,R)$

(104) $\mathrm{div}\, F(x,y,z) = \partial_x y + \partial_y(-x) + \partial_z \left((z^2+2z)\, e^{x^2/9 + y^2/25}\right)$

$= e^{x^2/9 + y^2/25} = e^{r^2}$ (nelle coordinate cilindriche di cui sopra).

Quindi:

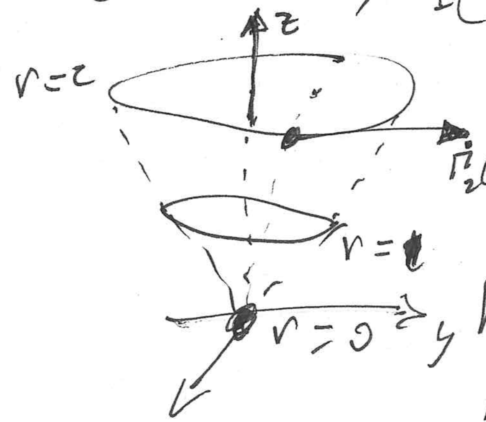
$$\iint_{\partial\Omega} F\cdot\nu \, d\sigma = \int_0^2 dz \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, (z+1) \int_0^{z+1} 15\, r \cdot e^{r^2}\, dr = 2\pi \cdot \int_0^2 15 \cdot \left(\frac{e^{r^2}}{2}\right)\Big|_0^{z+1} (z+1)\, dz$$

$$= \frac{15\pi}{2} \cdot \int_0^2 (z+1)\left[e^{(z+1)^2} - 1\right] dz = \frac{15}{4}\pi \cdot \left[e^{(z+1)^2} - (z+1)^2\right]_0^2$$

$$= \frac{15}{4}\pi \cdot \left[(e^9 - 3) - (e-1)\right] = \frac{15}{4}\pi \cdot (e^9 - e - 2)$$

(105) Recupero la parametrizzazione da (102), modificando l'intervallo su cui varia r poiché $|z| \le 1$ e $z = r-1 \iff -1 \le r-1 \le 1 \iff r \in [0,2]$.

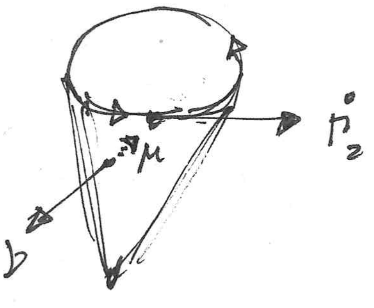
$\Phi : A \to \mathbb{R}^3$; $\Phi(r,\theta) = (3r\cos\theta, 5r\sin\theta, r-1)$; $A = [0,2]\times[-\pi,\pi]$



Pongo $r=0$: $\Gamma_1(\theta) = (0,0,-1)$ $\forall\theta\in[-\pi,\pi]$, non è una curva e non ha senso parlare di compatibilità.

Pongo $r=2$: $\Gamma_2(\theta) = (6\cos\theta, 10\sin\theta, 1)$, $\Gamma_2 : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^3$

$\Gamma_2'(\theta) = (-6\sin\theta, 10\cos\theta, 0) \Rightarrow \Gamma_2'(0) = (0,10,0)$



L'orientazione è incompatibile con $\nu \Rightarrow$ è compatibile con μ

(2) $P_y(x,y) = \partial_y(4x^3 - 12xy^2) = -24xy$ $\quad \| \iff \alpha = -12$ $\quad$ (3

$Q_x(x,y) = \partial_x(\alpha x^2 y + 4y^3) = 2\alpha xy$

Il potenziale $\varphi = \varphi(x,y)$ soddisfa:

$$\varphi(x,y) = \int P(x,y)\,dx = x^4 - 6x^2y^2 + C(y)$$

e $-12x^2y + 4y^3 = \partial_y \varphi(x,y) = -12x^2y + C'(y)$,

cioè $C'(y) = 4y^3$; posso prendere $C(y) = y^4$:

$$\boxed{\varphi(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4}$$

(3) Siano $\left.\begin{array}{l} u = 5x + 2y \\ v = 2x - 5y \end{array}\right\} \mapsto \begin{array}{l} |u| \le \pi/2 \\ |v| \le \pi/2 \end{array}$

e $du\,dv = \left|\det J\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}\right| dx\,dy = \left|\det\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\right| dx\,dy$

$= |-29| \cdot dx\,dy = 29 \cdot dx\,dy$

$$\Rightarrow \text{Int} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} du \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dv \,\frac{\cos(u)}{29} = \frac{\pi}{29} \cdot \left(\sin(u)\right)_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{2\pi}{29}$$

(4) $\begin{cases} f_x = (x-y)(y+3) + (x+y)(y+3) = 2x(y+3) \\ f_y = (x-y)(y+3) - (x+y)(y+3) + (x+y)(x-y) \end{cases}$

$f_x = 0 \iff x = 0$ o $y = -3$ sostituisco in $f_y = 0$:

$\begin{cases} x = 0 \\ -y(y+3) - y(y+3) - y^2 = 0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} y + 3 = 0 \\ (x-3)(x+3) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0 \\ -3y^2 - 6y = 0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} y = -3 \\ x = \pm 3 \end{cases}$ cioè $(0,0)$, $(0,-2)$, $(3,-3)$, $(-3,-3)$ | punti critici

$$\mathrm{Hess}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(y+3) & 2x \\ 2x & -6y-6 \end{pmatrix}$$

usando

$$f_y = -2y(y+3) + x^2 - y^2 = -3y^2 - 6y + x^2 \Rightarrow f_{yy} = -6y-6$$

$$\mathrm{Hess}\, f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \text{ non def.}$$

$$\mathrm{Hess}\, f(0,-2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ def. pos.}$$

$$\mathrm{Hess}\, f(\pm 3,-3) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 6 \\ \pm 6 & 12 \end{pmatrix} \text{ non def.}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} (0,0) \text{ e } (\pm 3,-3) \\ \text{sono p.ti di sella} \\ (0,-2) \text{ p.to min. rel.} \end{array}}$

(5) $\ddot{x} - 2t\dot{x} = 0$ Pongo $\dot{x} = y$: $\dot{y} - 2ty = 0$

Risolvo come eq. diff. lin. del I ordine (p.es.):

$$\underbrace{\dot{y} e^{-t^2} - 2ty\, e^{-t^2}}_{= (y e^{-t^2})^{\cdot}} = 0 \Rightarrow y(t) \cdot e^{-t^2} = c \text{ (costante)}$$

$$y(t) = c \cdot e^{t^2}$$

$$\dot{x}(t) = c \cdot e^{t^2} \Rightarrow \boxed{x(t) = c \int_0^t e^{s^2}\, ds + D} \text{ con } c, D \in \mathbb{R}$$

(6) $\partial_r h = (\partial_x f) \circ G \cdot \partial_r(r\cos\theta \sin\varphi) + (\partial_y f) \circ G \cdot \partial_r(r\sin\theta \sin\varphi)$

$+ (\partial_z f) \circ G \cdot \partial_r(r\cos\varphi) = \boxed{\partial_r h(r,\varphi,\theta) =}$

$= \partial_x f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) \cdot \cos\theta\sin\varphi$

$+ \partial_y f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) \cdot \sin\theta\sin\varphi$

$+ \partial_z f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) \cdot \cos\varphi$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_r h(1, \pi/2, 0) = \partial_x f(1,0,0)}$$