Prova scritta di Analisi Matematica II (23/1/2012)

Nome..**Cognome**... **Matricola**.................

Prova orale verso: *l'inizio* | *la fine* dell'appello. (Cancellare la voce che non interessa).

(1) [14 pti] Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme $\Omega = \left\{ (x,y,z) : \ \left(\sqrt{x^2+y^2}-3\right)^2 + z^2 \leq 1 \right\}$.

(1.1) Fare un disegno *qualitativo* di Ω.

(1.2) Parametrizzare $\partial\Omega$ e dire se le parametrizzazioni scelte sono o meno compatibili con il campo ν normale a $\partial\Omega$ esternamente a Ω. (**Suggerimento che si può o meno seguire:** quando trovate delle circonferenze, dotatele di coordinate polari).

(1.3) Sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale. Scrivere *una* formula esplicita che dia il flusso $\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu d\sigma$ di F attraverso $\partial\Omega$. (Nella formula devono apparire, magari iterati, solo integrali di una variabile).

(1.4) Calcolare il flusso di cui al punto (1.3) quando $F(x,y,z) = (x,y,z)$.

(1.5) . Sia $\Sigma = \{(x,y,z) \in \partial\Omega : \ x \leq 0\}$. Parametrizzare $\partial\Sigma$ e dire se le parametrizzazioni scelte sono compatibili con la normale ν a Σ (ν essendo la normale di cui al punto (1.2)).

Prova Parziale: i primi 3 esercizi.

(1.6) Calcolare $\iint_\Sigma (\nabla \times G) \cdot \mu d\sigma$, con $G \in C^1(\Sigma, \mathbb{R}^3)$, $G(x, y, z) = (xz, yz, 0)$. $\nu = \mu$

(2) [3 pti] Dire per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo $F_\alpha : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ è chiuso, dove

$$F_\alpha(x, y) = \left(\frac{-\alpha y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Sia γ la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio a e sia F l'unico campo chiuso tra i campi F_α. Calcolare

$$\int_\gamma F(z) \cdot dz.$$

Dire se F è esatto.

(3) [4 pti] Sia $A = \{(x, y) : (x - 3)^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\iint_A x^2 dxdy.$$

(4) [3 pti] Trovare l'integrale generale di

$$y'' - 9y = \sin(3x) + e^{3x}$$

(5) [3 pti] Sia $F : [0,1] \times [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$F(\rho,\varphi,\theta) = ((3 + \rho\cos\varphi)\cos\theta, (3 + \rho\cos\varphi)\sin\theta, \rho\sin\varphi).$$

Trovare la funzione $\lambda : [0,1] \times [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi] \to [0,+\infty)$ tale che

$$\iiint_{F(R)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{R} f(F(\rho,\varphi,\theta))\lambda(\rho,\varphi,\theta)d\rho d\varphi d\theta$$

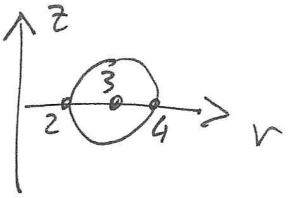
ogniqualvolta $R \subseteq [0,1] \times [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$ è un rettangolo e $f \in C(R,\mathbb{R})$.

(6) [3 pti] Classificare i punti critici di $f(x,y) = (y - 1 - 9x^2)y(y+1) = 0$.

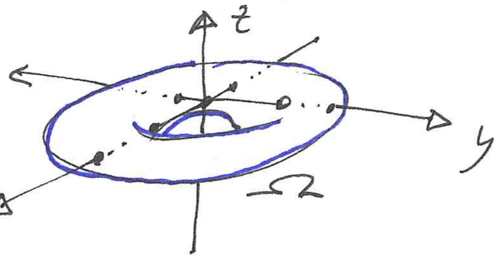
AM II – 23/1/2012

1

(1.1) Pongo $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, $|\theta| \leq \pi$ | $(x,y,z) \in \Omega \iff (r-3)^2 + z^2 \leq 1$



Ω è un solido di rotazione:



Ω è un TORO (una "ciambella").

(1.2) $\partial\Omega = \{(x,y,z) : [(x^2+y^2)^{1/2} - 3]^2 + z^2 = 1\}$

$(x,y,z) \in \partial\Omega \iff \begin{cases} r \geq 0 \\ |\theta| \leq \pi \end{cases}$ e $(r-3)^2 + z^2 = 1$ $(*)$

Parametrizzo $(*)$ in coordinate polari (ρ, φ):

$\begin{cases} r - 3 = \cancel{\rho}\cos\varphi \\ z = \cancel{\rho}\sin\varphi \end{cases}$ $|\varphi| \leq \pi$ cioè $\begin{cases} r = 3 + \cos\varphi \\ z = \sin\varphi \end{cases}$

Da cui la parametrizzazione $(\theta, \varphi) \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^3$

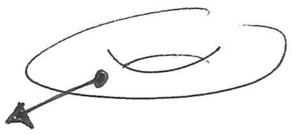
$$\boxed{A = [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi] \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^3 \quad \Phi(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3+\cos\varphi)\cos\theta \\ (3+\cos\varphi)\sin\theta \\ \sin\varphi \end{pmatrix}}$$

$\Phi(A) = \partial\Omega$.

$$\partial_\theta\Phi \times \partial_\varphi\Phi(\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -(3+\cos\varphi)\sin\theta & (3+\cos\varphi)\cos\theta & 0 \\ -\sin\varphi\cdot\cos\theta & -\sin\varphi\cdot\sin\theta & \cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= ((3+\cos\varphi)\cos\varphi\cdot\cos\theta; (3+\cos\varphi)\cos\varphi\cdot\sin\theta; (3+\cos\varphi)\sin\varphi)$$

Scelgo $(\theta,\varphi) = (0,0)$: $\Phi(0,0) = (4,0,0)$; $\partial_\theta\Phi \times \partial_\varphi\Phi(0,0) = (4,0,0)$



$\boxed{\Phi \text{ è compatibile con la normale esterna } \nu.}$

(1.3) $$\iint_{\partial\Omega} F\cdot\nu \, d\sigma = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \, F((3+\cos\varphi)\cos\theta, (3+\cos\varphi)\sin\theta; \sin\varphi) \cdot [(3+\cos\varphi)(\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi)]$$

(Ho raccolto il fattore scalare $(3+\cos\varphi)$ per comodità).

(104) Provo senza usare il T. della divergenza: 2

$$\iint_{\partial\Omega} F\circ\nu\, d\sigma = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \left((3+\cos\varphi)\cos\theta, (3+\cos\varphi)\sin\theta, \sin\varphi\right)\circ \left[(3+\cos\varphi)\,(\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi)\right]$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, (3+\cos\varphi)\left\{(3+\cos\varphi)\cos\varphi\,(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{=1}) + \sin^2\varphi\right\}$$

$$= 2\pi \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left[(3+\cos\varphi)^2\cos\varphi + (3+\cos\varphi)\sin^2\varphi\right] d\varphi$$

$$= 2\pi \cdot \left[\int_{-\pi}^{\pi} 3\cos\varphi\, d\varphi + \int_{-\pi}^{\pi} 6\cos^2\varphi\, d\varphi + \int_{-\pi}^{\pi} \cos^3\varphi\, d\varphi + 3\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi + \int_{-\pi}^{\pi} \cos\varphi\cdot\sin^2\varphi\, d\varphi\right]$$

$$= 2\pi\cdot\left[3\cdot 0 + 6\cdot\pi + 0 + 3\cdot\pi + 0\right] = \boxed{18\pi^2}$$

Per gli integrali nulli ho usato periodicità e funzioni dispari. Per esempio: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^3\varphi\, d\varphi = \int_{3/2\pi}^{-\pi/2} \cos^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right) d\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$

$$= \int_{-\pi/2}^{3/2\pi} \sin^3 t\, dt \underset{\text{periodicità}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 t \cdot dt = 0,$$ perché sin è dispari.

Se volessi usare il Teo. della divergenza, dovrei parametrizzare Ω. Appoggiandomi a (102) e (101),

$$\odot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = H(\theta,\rho,\varphi) = \begin{pmatrix} (3+\rho\cos\varphi)\cos\theta \\ (3+\rho\cos\varphi)\sin\theta \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix}; \text{ con } \begin{cases} |\varphi| \le \pi \\ |\theta| \le \pi \\ 0 \le \rho \le 1 \end{cases}$$

Ottengo $\odot$ osservando che $(r-3)^2+z^2 \le 1$ se

$$\begin{cases} r-3 = \rho\cos\varphi \\ z = \rho\sin\varphi \end{cases} \text{ con } 0\le\rho\le 1 \text{ e } |\varphi|\le\pi \quad \Big| \quad \text{cioè, } \begin{cases} r = 3+\rho\cos\varphi \\ z = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

e l'espressione per $(x,y,z)\in\Omega$ segue subito.

Avendo $\operatorname{div}(x,y,z) = 1+1+1 = 3$,

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} F\,.\, dx\,dy\,dz = 3\cdot \iiint_\Omega dx\,dy\,dz$$ è il volume del toro$\times 3$

$$= 3\cdot \int_0^1 d\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\,. \left|\det\left(JH(\theta,\rho,\varphi)\right)\right|$$

per il Teorema sul cambiamento delle variabili negli integrali tripli.

$$JH(\theta,\rho,\varphi)=\begin{bmatrix}-(3+\rho\cos\varphi)\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\cos\theta\\ (3+\rho\cos\varphi)\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta\\ 0 & \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det JH(\theta,\rho,\varphi)=(3+\rho\cos\varphi)\cdot\rho\cdot\det\begin{vmatrix}-\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\sin\theta\\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}$$

$$=(3+\rho\cos\varphi)\cdot\rho\cdot\left[-\sin\theta\cdot\sin\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)-\cos^2\theta\cdot\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\cdot\cos^2\theta\right]=-(3+\rho\cos\varphi)\rho.$$

OSS. Per invarianza per rotazioni del toro: $\det JH(\theta,\rho,\varphi)=\det JH(0,\rho,\varphi)$ non dipende da θ. Posso quindi calcolare -più semplicemente-:

$$\det JH(0,\rho,\varphi)=(3+\rho\cos\varphi)\,\rho\cdot\det\begin{vmatrix}0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}$$

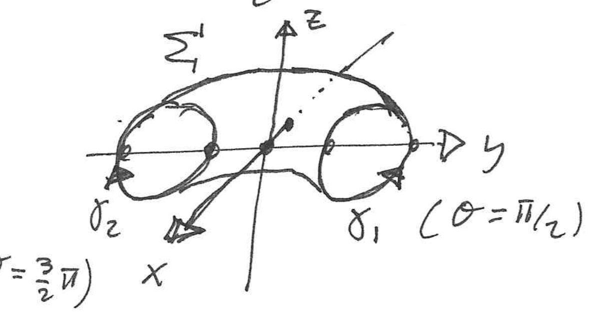
$=(3+\rho\cos\varphi)\cdot\rho\cdot(-1)$, semplificando i conti.

Finalmente, $3\cdot\int_0^1 d\rho\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_{-\pi}^{\pi}(3+\rho\cos\varphi)\rho=$

$=3\cdot 2\pi\cdot\int_0^1\rho\cdot\int_{-\pi}^{\pi}(3+\rho\cos\varphi)\,d\varphi\cdot d\rho=$

$=3\cdot 2\pi\cdot\int_0^1 2\pi\cdot 3\,\rho\,d\rho = 9\cdot(2\pi)^2\cdot\frac{1}{2}=18\pi^2$, come sopra.

(10.5) $\partial\Sigma=\partial\Omega\cap\{(x,y,z): x=0\}$: uso la parametrizzazione di $\partial\Omega$ in (10.1) con $\theta=\frac{\pi}{2}$ ~~(corrispondente a x=0)~~ o $\theta=\frac{3}{2}\pi$ (corrispondenti a $x=0$).



$\gamma_1(\varphi)=(0,\ 3+\cos\varphi,\ \sin\varphi)$

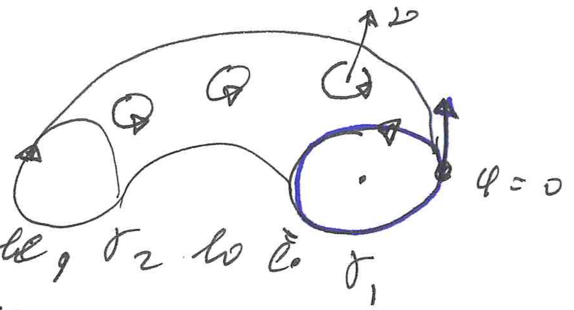
$\dot\gamma_1(\varphi)=(0,\ -\sin\varphi,\ \cos\varphi)$

$\gamma_1:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}^3$

$\gamma_2(\varphi)=(0,\ -(3+\cos\varphi),\ \sin\varphi)$

$\dot\gamma_2(\varphi)=(0,\ \sin\varphi,\ \cos\varphi)$

$\gamma_2:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}^3$



$\dot{\gamma}_1(0) = (0,0,1)$

γ_1, non è compatibile, γ_2 lo è.

(1.6) Conviene usare Stokes, dunque:

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \times G)\cdot \nu \, d\sigma = \int_{\partial(\Sigma,\nu)} G(\xi)\cdot d\xi = -\int_{\gamma_1} G(\xi)\cdot d\xi + \int_{\gamma_2} G(\xi)\cdot d\xi$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi} (0; (3+\cos\varphi)\sin\varphi; 0)\cdot(0, -\sin\varphi, \cos\varphi)\, d\varphi$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} (0; -(3+\cos\varphi)\sin\varphi; 0)\cdot(0, \sin\varphi, \cos\varphi)\, d\varphi = \boxed{0}$$

Se non voglio usare Stokes, calcolo

$$\nabla \times G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xz & yz & 0 \end{vmatrix} = (-y, x, 0) \Rightarrow$$

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \times G)\cdot \nu \, d\sigma = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \, (-(3+\cos\varphi)\sin\theta, (3+\cos\varphi)\cos\theta, 0)\cdot((3+\cos\varphi)\cos\varphi\cdot\cos\theta; (3+\cos\varphi)\cos\varphi\cdot\sin\theta; (3+\cos\varphi)\sin\varphi)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \, (3+\cos\varphi)^2 [-\sin\theta\cdot\cos\theta + \cos\theta\cdot\sin\theta] = \boxed{0}$$

(2) Sia $F_\alpha = (P_\alpha, Q_\alpha)$: $\partial_y P_\alpha = \alpha \dfrac{(-1)(x^2+y^2) - (-y)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{\alpha(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$$\partial_x Q_\alpha(x,y) = \frac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

F_α è ~~esatto~~ chiuso $\iff \boxed{\alpha=1}$ $\qquad \gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$, $|\theta| \le \pi$

$$\int_\gamma F(z)\cdot dz = \int_{-\pi}^{\pi} F(\gamma(\theta))\cdot \dot\gamma(\theta)\, d\theta \qquad \dot\gamma(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{\sin\theta}{1}, \frac{\cos\theta}{1}\right)\cdot(-\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} 1\, d\theta = 2\pi \ne 0$$

$\boxed{\text{F non è esatto.}}$

(3) Pongo $\begin{cases} x-3 = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\quad 0 \le r \le 1$, $|\theta| \le \pi$ $\quad J\begin{pmatrix} x & y \\ \theta & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta & \cos\theta \\ r\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$

$$\left|\det J\begin{pmatrix} x & y \\ \theta, & r \end{pmatrix}\right| = r$$

$$\iint_A x^2\, dx\, dy = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^1 r\, dr\, (3 + r\cos\theta)^2 =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^1 r\, dr\, (9 + 6r\cos\theta + r^2\cos^2\theta) =$$

$$= 2\pi\cdot 9\cdot\left(\frac{r^2}{2}\right)_0^1 + 6\cdot\left(\frac{r^3}{3}\right)_0^1\cdot(\sin\theta)_{-\pi}^{\pi} + \left(\frac{r^4}{4}\right)_0^1 \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 9\pi + 0 + \frac{1}{4}\cdot\pi = \boxed{\frac{37}{4}\pi}$$

(4) Eq. omogenea: $z'' - 9z = 0$ $\quad$ Pol. caratt. $\lambda^2 - 9 = 0$, $\lambda = \pm 3$

$z(x) = A\cdot e^{3x} + B\cdot e^{-3x}$: risonanza.

Provo con $y(x) = \cancel{A} x e^{3x} + D\cos(3x) + E\sin(3x)$

$y'(x) = Ce^{3x} + 3Cx e^{3x} - 3D\sin(3x) + 3E\cos(3x)$

$y''(x) = 6Ce^{3x} + 9Cx e^{3x} - 9D\cos(3x) - 9E\sin(3x)$

$$y'' - 9y = 6C\cdot e^{3x} - 8D\cdot\cos(3x) - 8E\cdot\sin(3x) \overset{?}{=} e^{3x} + \sin(3x)$$

$\iff C = 1/6$; $D = 0$; $E = -1/8$:

$\boxed{y(x) = Ae^{3x} + Be^{-3x} + \frac{x}{6}e^{3x} - \frac{1}{8}\sin(3x)}$ è l'Int. Gen.

(5) Per il Teorema sul cambiamento delle variabili negli integrali tripli,

$$\lambda(\rho, \varphi, \theta) = |\det JF(\rho, \varphi, \theta)| \underset{\uparrow}{=} (3+\rho\cos\varphi)\rho$$

calcolato in (10.4)

(6) $f_x = -18x \cdot y \cdot (y+1) = 0 \iff x=0 \text{ o } y=0 \text{ o } y+1=0$

$f_y = y(y+1) + (y-1-9x^2)(y+1) + (y-1-9x^2)y$

$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} x=0 \\ y(y+1)+(y-1)(y+1)+(y-1)y = 3y^2-1=0 \end{cases}$ cioè $(x,y) = (0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$

o $\begin{cases} y=0 \\ -1-9x^2=0 \end{cases}$ (imp) o $\begin{cases} y+1=0 \\ -1-9x^2=0 \end{cases}$ (imp).

$f_{xx} = -18\, y(y+1)$

$f_{xy} = -18x\cdot(2y+1)$

$f_{yy} = 2y+1+y-1-9x^2+y+1+y-1-9x^2+y$
$= 6y-18x^2$

$$\text{Hess} f(0, \pm\tfrac{1}{\sqrt{3}}) = \begin{pmatrix} -18(\pm\frac{1}{\sqrt{3}})(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}+1) & 0 \\ 0 & \pm\frac{6}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

I segni sono $\begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & + \end{pmatrix}$ per $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$

e $\begin{pmatrix} + & 0 \\ 0 & - \end{pmatrix}$ per $(0, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

$\boxed{(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}) \text{ sono punti di sella.}}$