II prova parziale di Analisi Matematica II (13/2/2012)

Nome...**Cognome**... **Matricola**.................

Prova orale: entro la settimana.

(1) **[14 pti]** Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme $\Omega = \{(x,y,z): \ x \geq 0, \ y \leq 0, \ z \geq 0, \ x - y + z \leq 1\}$.

(1.1) Fare un disegno *qualitativo* di Ω.

(1.2) Parametrizzare $\partial\Omega$ e dire se le parametrizzazioni scelte sono o meno compatibili con il campo ν normale a $\partial\Omega$ esternamente a Ω.

(1.3) Sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale. Scrivere *una* formula esplicita che dia il flusso $\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu d\sigma$ di F attraverso $\partial\Omega$. (Nella formula devono apparire, magari iterati, solo integrali di una variabile).

(1.4) Calcolare il flusso di cui al punto (1.3) quando $F(x,y,z) = (xe^z, -ye^z, 4e^z)$.

(1.5) . Sia $\Sigma = \{(x,y,z) \in \partial\Omega: \ z \neq 0\}$. Parametrizzare $\partial\Sigma$ e dire se le parametrizzazioni scelte sono compatibili con la normale ν a Σ (ν essendo la normale di cui al punto (1.2)).

(1.6) Calcolare $\iint_\Sigma (\nabla \times G) \cdot \nu d\sigma$, con $G \in C^1(\Sigma, \mathbb{R}^3)$, $G(x, y, z) = (-y, x, 0)$.

(2) [**3 pti**] Dire per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo $F_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è esatto, dove

$$F_\alpha(x, y) = (\sin(3y) + 3y\sin(3x), x\cos(3y) + \alpha\cos(3x)).$$

Calcolarne un potenziale.

(3) [**4 pti**] Sia $A = \left\{(x, y) : \ x > 0,\ y \geq 0,\ \arctan(y/x) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\arctan(y/x)\right\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\iint_A \frac{dxdy}{9 + x^2 + y^2}.$$

Facoltativo. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile infinite volte. Definiamo $G : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, x) : \ x \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$,

$$G(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Calcolare

$$\partial_x G(x, y) + \partial_y G(x, y),\ \lim_{y \to x} (\partial_x G(x, y) + \partial_y G(x, y))$$

e

$$\partial_{xx} G(x, y) + 2\partial_{xy} G(x, y) + \partial_{yy} G(x, y),\ \lim_{y \to x} (\partial_{xx} G(x, y) + 2\partial_{xy} G(x, y) + \partial_{yy} G(x, y)).$$

Prova scritta di Analisi Matematica II (13/2/2012)

Nome..**Cognome**.. **Matricola**................

Prova orale: entro la settimana.

(1) **[14 pti]** Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme $\Omega = \{(x, y, z) : \ x \geq 0, \ y \leq 0, \ z \geq 0, \ x - y + z \leq 1\}$.

(1.1) Fare un disegno *qualitativo* di Ω.

(1.2) Parametrizzare $\partial\Omega$ e dire se le parametrizzazioni scelte sono o meno compatibili con il campo ν normale a $\partial\Omega$ esternamente a Ω.

(1.3) Sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale. Scrivere *una* formula esplicita che dia il flusso $\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu d\sigma$ di F attraverso $\partial\Omega$. (Nella formula devono apparire, magari iterati, solo integrali di una variabile).

(1.4) Calcolare il flusso di cui al punto (1.3) quando $F(x, y, z) = (xe^z, -ye^z, 4e^z)$.

(1.5) . Sia $\Sigma = \{(x, y, z) \in \partial\Omega : \ z \neq 0\}$. Parametrizzare $\partial\Sigma$ e dire se le parametrizzazioni scelte sono compatibili con la normale ν a Σ (ν essendo la normale di cui al punto (1.2)).

(1.6) Calcolare $\iint_\Sigma (\nabla \times G) \cdot \nu d\sigma$, con $G \in C^1(\Sigma, \mathbb{R}^3)$, $G(x, y, z) = (-y, x, 0)$.

(2) **[3 pti]** Dire per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo $F_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è esatto, dove

$$F_\alpha(x, y) = (\sin(3y) + 3y\sin(3x), x\cos(3y) + \alpha\cos(3x))\,.$$

3

Calcolarne un potenziale.

(3) **[4 pti]** Sia $A = \left\{(x, y) :\ x > 0,\ y \geq 0,\ \arctan(y/x) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\arctan(y/x)\right\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\iint_A \frac{dxdy}{9 + x^2 + y^2}.$$

(4) [3 pti] Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{t-4}{x-4} \\ x(0) = 6 \end{cases}$$

(5) [3 pti] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile infinite volte. Definiamo $G : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, x) : \ x \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$,

$$G(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Calcolare

$$\partial_x G(x, y) + \partial_y G(x, y)$$

e mostrare che esiste $\lim_{y \to x}(\partial_x G(x, y) + \partial_y G(x, y)) = f''(x)$.

Facoltativo. Calcolare

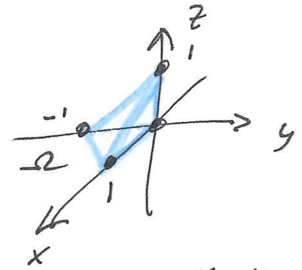
$$\lim_{y \to x} \left(\partial_{xx} G(x, y) + 2\partial_{xy} G(x, y) + \partial_{yy} G(x, y)\right).$$

(6) [3 pti] Classificare i punti critici di $f(x, y) = (y - 1 + 9x^2)y(y + 1) = 0$.

AM II 13/2/2012

(1) (1.1) Ω è l'intersezione di quattro semispazi.
$x \geq 0,\ y \leq 0,\ z \geq 0$ definiscono un "ottante" in $\mathbb{R}^3$.
Cerco le intersezioni di $x - y + z = 1$ con gli assi:
asse x; $y = z = 0$; $x = 1$
asse y; $x = z = 0$; $y = -1$
asse z; $x = y = 0$; $z = 1$

Ω è un tetraedro.



(1.2) $\Sigma_1 = \partial\Omega \cap \{(x,y,z) : z = 0\} = \{(x,y,0) : x \geq 0; y \leq 0; x - y \leq 1\}$

$\mathbb{R}^2 \supseteq A_1 = \{(x,y) : x \geq 0, y \leq 0; x - y \leq 1\} \xrightarrow{\Phi_1} \mathbb{R}^3$ $\quad \Phi_1(x,y) = (x,y,0)$

$\partial_x \Phi_1(x,y) \times \partial_y \Phi_1(x,y) = (1,0,0) \times (0,1,0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1)$

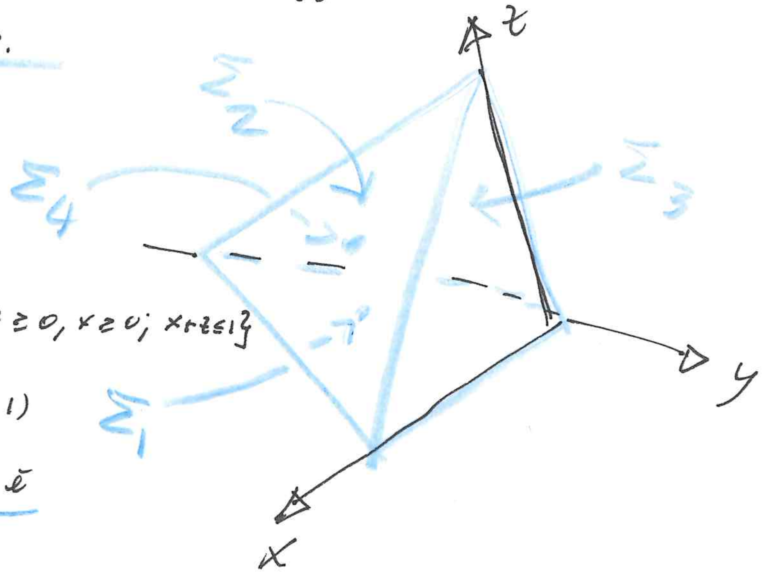
Φ_1 non è compatibile con ν. $\quad \Phi_1(A_1) = \Sigma_1$

$A_2 = A_1 \xrightarrow{\Phi_2} \mathbb{R}^3$; $\Phi_2(x,y) = (x, y, 1 - x + y)$; $\quad \Phi_2(A_1) = \Sigma_2$ dove

$\Sigma_2 = \{(x,y,z) : x - y + z = 1\} \cap \Omega = \{(x, y, 1 - x + y) : x \geq 0, y \leq 0; x - y \leq 1\}$

$\partial_x \Phi_2(x,y) \times \partial_y \Phi_2(x,y) = (1,0,-1) \times (0,1,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1,-1,1)$

Φ_2 è compatibile con ν.



$\Sigma_3 = \partial\Omega \cap \{(x,y,z) : y = 0\} =$
$= \{(x,0,z) : x \geq 0; z \geq 0; x + z \leq 1\}$

$\mathbb{R}^2 \supseteq A_3 \xrightarrow{\Phi_3} \mathbb{R}^3$ $\quad \Phi_3(x,z) = (x,0,z)$

$\Phi_3(A_3) = \Sigma_3$; $A_3 = \{(x,z) : z \geq 0, x \geq 0; x + z \leq 1\}$

$(\partial_x \Phi_3 \times \partial_z \Phi_3)(x,z) = (1,0,0) \times (0,0,1)$
$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0,-1,0)$: Φ_3 non è compatibile con ν.

$\Sigma_4 = \partial\Omega \cap \{(x,y,z) : x = 0\} = \{(0,y,z) : y \leq 0 \leq z; -y + z \leq 1\}$

$\mathbb{R}^2 \supseteq A_4 = \{(y,z) : y \leq 0 \leq z; -y + z \leq 1\} \xrightarrow{\Phi_4} \mathbb{R}^3$, $\quad \Phi_4(A_4) = \Sigma_4$

$\Phi_4(y,z) = (0,y,z)$; $\quad (\partial_y \Phi_4 \times \partial_z \Phi_4)(y,z) = (0,1,0) \times (0,0,1) =$
$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,0,0)$: Φ_4 non è comp. con ν.

(1.3) Integrando "per fili" rispetto a z e usando riduzioni per insiemi y-semplici in $\mathbb{R}^2$, per il T. della div.

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iint_{A_1} \left\{ \int_0^{1-x+y} \operatorname{div} F(x,y,z) \right\} dx\, dy$$

quello di (1.2)

$$= \boxed{\int_0^1 dx \int_{x-1}^0 dy \int_0^{1-x+y} dz \ \operatorname{div} F(x,y,z)}$$

(1.4) $F(x,y,z) = (x e^z, -y e^z, 4 e^z) \Rightarrow \operatorname{div} F(x,y,z) = e^z - e^z + 4e^z = 4e^z$

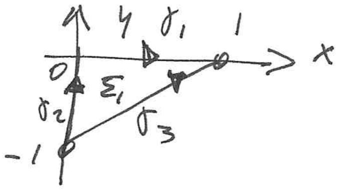
$\Rightarrow \iint_{\partial\Omega} F\cdot\nu\, d\sigma \underset{(1.3)}{=} \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 dy \left\{ \int_0^{1-x+y} 4 e^z\, dz \right\} =$

$= 4\cdot\int_0^1 dx \int_{x-1}^0 (e^{1-x+y} - 1)\, dy = 4\cdot\int_0^1 [e^{1-x}(1-e^{x-1}) - (1-x)]\, dx$

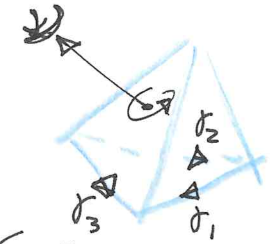
$= 4\cdot \int_0^1 (e^{1-x} - 1 - 1 + x)\, dx = 4\cdot\left\{ (-e^{1-x})\Big|_0^1 - 2 + \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 \right\}$

$= 4\cdot\left(e - 1 - 2 + \frac{1}{2}\right) = \boxed{4\cdot(e - 5/2)}$

(1.5) $\Sigma_1' = \partial\Omega \setminus \Sigma_1$ ha come bordo di Σ_1' il bordo di Σ_1



$\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^3$
$\gamma_1(t) = (t, 0, 0)$; $\dot\gamma_1(t) = (1,0,0)$
$\gamma_2 : [-1, 0] \to \mathbb{R}^3$
$\gamma_2(t) = (0, t, 0)$; $\dot\gamma_2(t) = (0,1,0)$
$\gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^3$
$\gamma_3(t) = (t, -1+t, 0)$; $\dot\gamma_3(t) = (1,1,0)$



γ_3 è compatibile con $\nu \Rightarrow \gamma_1$ e γ_2 (che corrono incontro a γ_3) non sono compatibili con ν

(1.6) Uso Stokes e calcolo il lavoro $\iint_\Sigma (\nabla \times G)\cdot \nu\, d\sigma =$

$= -\int_{\gamma_1} G(s)\cdot ds - \int_{\gamma_2} G(s)\cdot ds + \int_{\gamma_3} G(s)\cdot ds =$

$= -\int_0^1 (-0, t, 0)\cdot(1,0,0)\, dt - \int_{-1}^0 (-t, 0, 0)\cdot(0,1,0)\, dt + \int_0^1 (t-1, t, 0)\cdot(1,1,0)\, dt$

$= -0 - 0 + \int_0^1 (2t-1)\, dt = \boxed{0}$

(2) Se $F_\alpha = (P_\alpha, Q_\alpha)$, $\partial_y P_\alpha(x,y) = 3\cdot\cos(3y) + 3\cdot\sin(3x)$
$\partial_x Q_\alpha(x,y) = 3\cdot\cos(3y) - 3\alpha\cdot\sin(3x)$ $\Longleftrightarrow \alpha = -1$
F_{-1} esatto

Per trovare un potenziale φ: $\varphi(x,y) = \int P(x,y)\, dx =$

$= x\cdot\sin(3y) - y\cdot\cos(3x) + K(y)$ e $\partial_y \varphi(x,y) =$

$= 3x\cos(3y) - \cos(3x) + K'(y) = Q(x,y) \Longleftrightarrow K'(y) = 0$:

$\boxed{\varphi(x,y) = x\cdot\sin(3y) - y\cdot\cos(3x) + \text{costante}}$

(3) In coordinate polari $\begin{Bmatrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{Bmatrix}$: $\begin{matrix} r \geq 0 \\ -\pi \leq \theta \leq \pi \end{matrix}$

$$(x,y) \in A \iff \left\{ \begin{matrix} r \geq 0 \\ |\theta| \leq \pi/2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{matrix} \right\} \quad \text{e}$$

$$\theta \leq r \leq 2\theta$$

poiché per $|\theta| < \pi/2$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\theta) = \theta,$$

cioè $(x,y) \in A \iff \begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq \theta < \pi/2 \\ \theta \leq r \leq 2\theta \end{cases}$

$$\Rightarrow \iint_A \frac{dx\,dy}{9 + x^2 + y^2} = \iint_{\{(r,\theta);\ r \geq 0;\ 0 \leq \theta < \pi/2;\ \theta \leq r \leq 2\theta\}} \frac{r\,dr}{9 + r^2}$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_\theta^{2\theta} \frac{r\,dr}{9 + r^2} = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2}\log(9 + r^2)\right]_\theta^{2\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [\log(9 + 4\theta^2) - \log(9 + \theta^2)]\,d\theta \qquad \left(\text{integro per parti}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\theta\log(9 + 4\theta^2) - \theta\log(9 + \theta^2)\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\theta \cdot 8\theta}{9 + 4\theta^2} - \frac{\theta \cdot 2\theta}{9 + \theta^2}\right) d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\log(9 + \pi^2) - \log(9 + \pi^2/4)\right] + \int_0^{\pi/2} \left(-1 + \frac{9}{9 + 4\theta^2}\right) - \left(-1 + \frac{9}{9 + \theta^2}\right) d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \left[\log(9 + \pi^2) - \log(9 + \pi^2/4)\right] + \left[\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\theta}{3}\right) - 3\operatorname{arctg}\left(\frac{\theta}{3}\right)\right]_0^{\pi/2}$$

$$\boxed{= \pi/4 \cdot \left[\log(9 + \pi^2) - \log(9 + \pi^2/4)\right] + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{3}\right) - 3\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

(4) $(x(t) - 4)\dot{x}(t) = t - 4 \iff \displaystyle\int_0^t (s - 4)\,ds \overset{\text{eq.}}{=} \int_0^t (x(s) - 4)\dot{x}(s)\,ds$

$$\frac{(t-4)^2}{2} - \frac{4^2}{2} = \left[\frac{(s-4)^2}{2}\right]_0^t \qquad \int_{6 = x(0)}^{x(t)} (x - 4)\,dx = \left[\frac{(x-4)^2}{2}\right]_6^{x(t)} = \frac{(x(t) - 4)^2}{2} - \frac{2^2}{2}$$

$$\iff (x(t) - 4)^2 = (t - 4)^2 + 2^2 - 4^2$$

Avrei $\quad x(t) - 4 = \pm\left[(t-4)^2 + 2^2 - 4^2\right]^{1/2}$

$$x(t) = 4 \pm \left[(t-4)^2 + 2^2 - 4^2\right]^{1/2}$$

che darebbe $\quad x(0) = 4 \pm \left[(0-4)^2 + 2^2 - 4^2\right]^{1/2} = 4 \pm [2^2]^{1/2} = 4 \pm 2$

$$\boxed{x(t) = 4 + \left[(t-4)^2 - 12\right]^{1/2};\ \text{Dominio}(x) = (-\infty, 4 + \sqrt{12})}$$

(5) $G(x,y) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \Rightarrow G_x(x,y) = \dfrac{-f'(x)(y-x) - (f(y)-f(x))(-1)}{(y-x)^2}$

$\|$

$G(y,x) \Rightarrow G_y(x,y) = \dfrac{-f'(y)(x-y) - (f(x)-f(y))(-1)}{(\cancel{x}-y)^2}$

$$\Rightarrow \boxed{G_x(x,y) + G_y(x,y) = \frac{f'(y)-f'(x)}{y-x}}$$

segue subito che $\lim_{y\to x} [G_x(x,y) + G_y(x,y)] = f''(x)$,

per definizione di derivata seconda.

FACOLTATIVO

Sostituendo nel conto sopra f con f' (quindi f' con f'') ho che

$$\frac{f''(y)-f''(x)}{y-x} = (\partial_x[G_x+G_y] + \partial_y[G_x+G_y])(x,y) =$$

$$= (G_{xx} + G_{xy} + G_{yx} + G_{yy})(x,y)$$

$$= G_{xx}(x,y) + 2G_{xy}(x,y) + G_{yy}(x,y).$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{y\to x} (G_{xx} + 2G_{xy} + G_{yy})(x,y) = f'''(x)}$$

Nota: questi conti sono gli stessi che ci danno il Triangolo di Tartaglia per i coefficienti di $(\cancel{y+x})^n$.

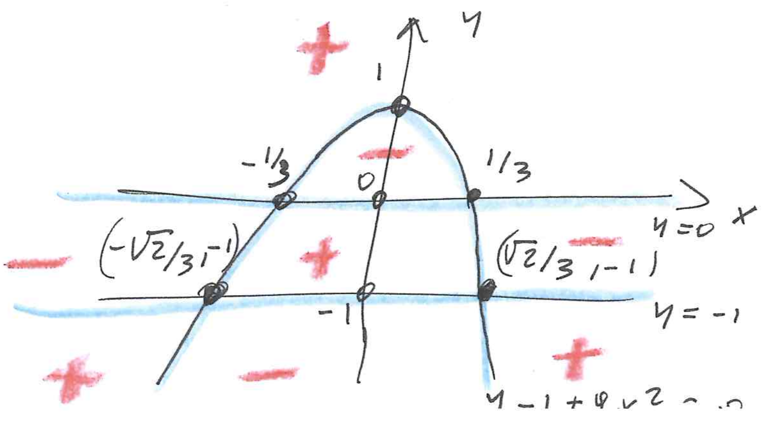
Avremo quindi che

$$G_{xxx} + 3G_{xxy} + 3G_{xyy} + G_{yyy} = \frac{f'''(y) - f'''(x)}{y-x}$$

e, più in generale, che $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \partial_x^{n-k} \partial_y^{k} G(x,y) = \dfrac{f^{(n)}(y) - f^{(n)}(x)}{y-x}}$

(6) $f(x,y) = (y-1+9x^2)\cdot y\cdot(y+1)$

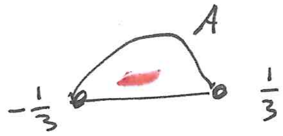
Per farmi un'idea vedo quando $f(x,y)=0$:



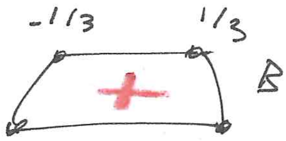
I punti $(\pm 1/3, 0)$ e $(\pm \frac{\sqrt{2}}{3}, -1)$ sono di sella, poiché $f=0$ in essi, cambia di segno vicino ad essi e $\nabla f = 0$ in essi.

Devo avere almeno un p.to di min. rel.

in



e un p.to di MAX. rel. in



Devo avere almeno $4+1+1=6$ p.ti critici.

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 18x\cdot y\cdot(y+1) \\ \partial_y f(x,y) = y(y+1) + (y-1+9x^2)(y+1) + (y-1+9x^2)\cdot y \end{cases}$$

$$\nabla f(x,y)=0 \iff \begin{cases} y=0 \\ y-1+9x^2=0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} y+1=0 \\ y-1+9x^2=0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x=0 \\ y^2+y+y^2-1+y^2-y=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=0 \\ x=\pm 1/3 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} y=-1 \\ x=\pm\sqrt{2}/3 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x=0 \\ 3y^2-1=0 \end{cases}$$

$(\pm 1/3, 0)$ e $(\pm \sqrt{2}/3, -1)$: selle già trovate

$(0, 1/\sqrt{3}) \in A$: p.to MAX. rel.

$(0, -1/\sqrt{3}) \in B$: p.to min. rel.

Verificate con la Hessiana che ciò sia vero!!!

Il Facoltativo della Prova Parziale si trova assieme all'esercizio (5) della Complessiva.