I prova parziale scritta di Analisi Matematica II
Ingegneria Edile-Architettura, 2011/12

Nome...**Cognome**.. **Matricola**.................

Punteggio per l'ammissione alla seconda prova parziale: 15 punti.

[7 pt] Classificare i punti critici di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = (-y - 25x^2 + 1)xy + 4$$

[4 pt] Sia f la funzione nel primo esercizio. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(0,2)$ e lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di f nello stesso punto.

[7 pt] Siano $\alpha, \beta \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e si definisca $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$u(t,s) = (\alpha(t), \beta(t)) + s(-\dot{\beta}(t), \dot{\alpha}(t)).$$

Calcolare $Ju(t,s)$, la matrice jacobiana di u in (s,t), e $\det J(t,s)$.

[7 pt] Sia $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Trovare l'integrale generale di

$$y'' + 36y = f(x).$$

[5 pt] Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le equazioni differenziali (E_1) e (E_2) hanno soluzioni in comune? Trovarle tutte.

$$\begin{array}{ll} (E_1) & y'' + ky' + 2y = 0 \\ (E_2) & \quad y'' + 6y = e^x \end{array}$$

Facoltativo. (Svolgere su un foglio a parte). Supponiamo che nel secondo esercizio si sappia che $\frac{\dot{\alpha}}{\dot{\beta}}$ sia costante (cioè, che la traiettoria $\Gamma = (\alpha, \beta)$ abbia come immagine $\Gamma(\mathbb{R})$ una retta in $\mathbb{R}^2$). Mostrare che $\det J(t, s)$ è indipendente da s. Spiegare geometricamente questo fatto (anche aiutandosi con un disegno che illustri la funzione u).

① $f(x,y)=(-y-25x^2+1)\,xy+4 = -y^2x-25x^3y+xy+4$

$f_x(x,y) = -50x^2y - y^2+y = y\,(-50x^2-y+1)$

$f_y(x,y) = -2xy-25x^3+x = x\,(-2y-25x^2+1)$

$f_{xx}(x,y) = -100xy \qquad f_{xy}(x,y) = -50x^2-2y+1$

$f_{yx} = f_{xy} \qquad f_{yy}(x,y) = -2x$

$\nabla f(x,y)=0 \iff \begin{cases} 50x^2+y=1 \\ 25x^2+2y=1 \end{cases}$ o $\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$ o $\begin{cases} y=0 \\ 25x^2=1 \end{cases}$ o $\begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases}$

$\Updownarrow \quad (x,y)=(0,0) \qquad (x,y)=\left(\pm\frac{1}{5},0\right) \qquad (x,y)=(0,1)$

$\begin{cases} 25x^2-y=0 \\ 25x^2+2y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} y=25x^2 \\ 75x^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} y=25x^2 \\ x=\pm\frac{1}{5\sqrt3} \end{cases} \iff (x,y)=\left(\pm\frac{1}{5\sqrt3},\frac{1}{3}\right)$

6 P.ti critici: $(0,0), (0,1), \left(\pm\frac{1}{5},0\right), \left(\pm\frac{1}{5\sqrt3},\frac{1}{3}\right)$

Hess $f(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: non def.

Hess $f\left(\pm\frac{1}{5},0\right)=\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$ con $*\neq 0$: non def.

Hess $f(0,1)=\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$ con $*\neq 0$: non def.

Hess $f\left(\frac{1}{5\sqrt3},\frac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix} -100/5\cdot3\cdot\sqrt3 & -50/3\cdot25-2/3+1 \\ \cdot & -2/5\sqrt3 \end{pmatrix}=$

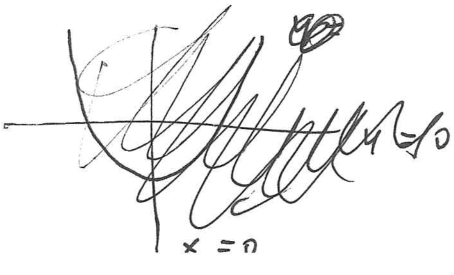
$=\begin{pmatrix} -20/3\sqrt3 & -1/3 \\ -1/3 & -2/5\sqrt3 \end{pmatrix}$: $\det(\cdot)=\frac{8}{9}-\frac{1}{9}>0$; Traccia $(\cdot)<0$

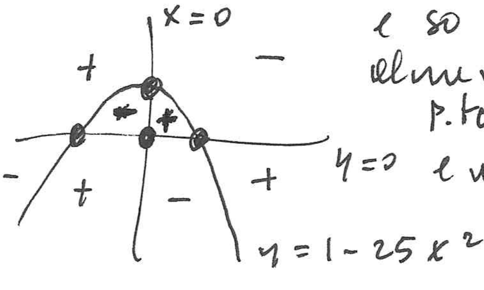
$\Rightarrow$ def. neg. $\Rightarrow$ p.to MAX. rel.

Hess $f\left(\frac{-1}{5\sqrt3},\frac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix} 20/3\sqrt3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/5\sqrt3 \end{pmatrix}$: def. pos. $\Rightarrow$ p.to min. rel.

Selle: $(0,0)$, $\pm\left(\frac{1}{5},0\right)$, $(0,1)$. p.to min. rel.: $\left(-\frac{1}{5\sqrt3},\frac{1}{3}\right)$ p.to MAX rel: $\left(\frac{1}{5\sqrt3},\frac{1}{3}\right)$

Considerando $\Gamma=\{(x,y): (-y-25x^2+1)\,xy=0\}$ trovo 4 p.ti sella e so che ci sono almeno un p.to MAX. rel e un p.to min. rel.





2

(2) $f(0,2)=4 \qquad \nabla f(0,2)=(-2,0) \qquad \mathrm{Hess} f(0,2)=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

$f(h,2+k)=4-2h-3hk+\underset{(h,k)\to(0,0)}{o}(h^2+k^2)$ (Taylor II ordine)

$z-4=-2x$ (Equazione del piano tangente in $(0,2)$).

(3) $v(t,s)=(\alpha(t)-s\dot\beta(t),\ \beta(t)+s\dot\alpha(t))$

$$Jv(t,s)=\begin{pmatrix} \dot\alpha(t)-s\cdot\ddot\beta(t) & -\dot\beta(t) \\ \dot\beta(t)+s\cdot\ddot\alpha(t) & \dot\alpha(t) \end{pmatrix}$$

e $\det Jv(t,s)=\dot\alpha(t)^2+\dot\beta(t)^2+s\left[\ddot\alpha(t)\dot\beta(t)-\ddot\beta(t)\dot\alpha(t)\right]$

(4) Risolvo $z''+36z=0$ ($\lambda^2+36=0 \Leftrightarrow \lambda^2=-36=i^2\cdot 6^2$
$\Leftrightarrow \lambda=\pm 6i$)

$z(x)=A\cdot\cos(6x)+B\cdot\sin(6x)$.

Cerco $y(x)=A(x)\cdot\cos(6x)+B(x)\cdot\sin(6x)$

$y'(x)=A'(x)\cdot\cos(6x)+B'(x)\cdot\sin(6x)-6A(x)\sin(6x)+6B(x)\cdot\cos(6x)$

$=-6A(x)\cdot\sin(6x)+6B(x)\cdot\cos(6x)$ (se $0=A'\cdot\cos(6x)+B'\cdot\sin(6x)$)

$y''(x)=-6A'(x)\cdot\sin(6x)+6B'(x)\cdot\cos(6x)-36\cdot A(x)\cdot\cos(6x)-36B(x)\cdot\sin(6x)$

$=f(x)-36A(x)\cos(6x)-36B(x)\sin(6x)$ (se $f(x)=-6A'\sin(6x)+6B'\cos(6x)$)

Sostituendo: $y''-36y'=f(x)$, se

$$\begin{cases} +6B'\cdot\cos(6x)-6A'\sin(6x)=f \\ B'\cdot\sin(6x)+A'\cdot\cos(6x)=0 \end{cases}:$$

$$B'(x)=\frac{\begin{vmatrix} f(x) & -6\sin(6x) \\ 0 & \cos(6x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6\cdot\cos(6x) & -6\cdot\sin(6x) \\ \sin(6x) & \cos(6x) \end{vmatrix}}=\frac{f(x)}{6}\cdot\cos(6x)$$

$$A'(x)=-\frac{f(x)}{6}\sin(6x)$$

Quindi $A(x) = \alpha - \frac{1}{6}\int_0^x f(t)\sin(6t)\,dt$

$B(x) = \beta + \frac{1}{6}\int_0^x f(t)\sin(6t)\,dt$ $\quad(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

e l'integrale generale dell'eq. diff. è

$$y(x) = \left[\alpha - \frac{1}{6}\int_0^x f(t)\sin(6t)\,dt\right]\cdot\cos(6x) + \left[\beta + \frac{1}{6}\int_0^x f(t)\cos(6t)\,dt\right]\cdot\sin(6x)$$

(5) L'integrale generale di (E_2) è

$$y_2(x) = A\cos(\sqrt{6}\,x) + B\sin(\sqrt{6}\,x) + \frac{e^x}{7}$$

Poiché $\cos(\sqrt{6}\,x)$ e $\sin(\sqrt{6}\,x)$, sostituiti in (E_1), producono multipli non nulli di se stessi, l'unica soluzione di (E_2) che <u>può</u> essere sol. di (E_1) è $\bar{y}_2(x) = e^x$. Sostituisco:

$$e^x + ke^x + 2e^x = 0, \quad \text{quindi } k = -3.$$

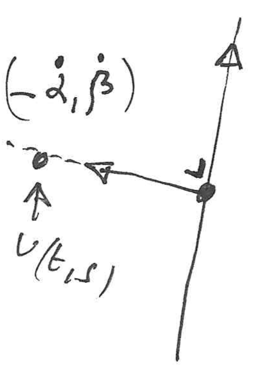
Se $k \neq -3 \Rightarrow$ non ci sono soluzioni in comune.

Se $k = -3 \Rightarrow$ la sola soluzione $x \mapsto e^x$ è in comune.

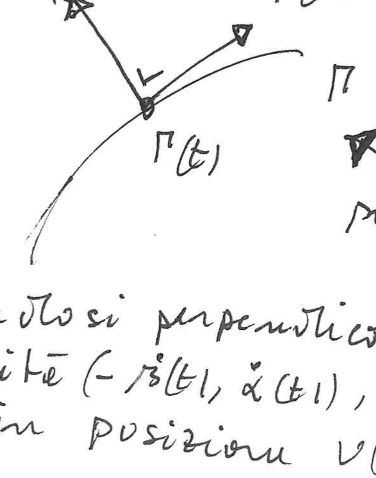
<u>FACOLTATIVO</u>. Se $\frac{\dot{\alpha}(t)}{\dot{\beta}(t)} = c$ è costante al variare di t,

allora $0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\alpha}}{\dot{\beta}}\right) = \frac{\ddot{\alpha}\cdot\dot{\beta} - \dot{\alpha}\cdot\ddot{\beta}}{\dot{\beta}^2} \iff \ddot{\alpha}\dot{\beta} - \dot{\alpha}\ddot{\beta} = 0$,

~~quindi~~ ciò che accade $\iff Jv(t,s) = \dot{\alpha}^2(t) + \dot{\beta}^2(t)$ non dipende da s.



Nel caso particolare.



Nel caso più generale.

Il punto $(\alpha(t), \beta(t))$ della curva, muovendosi perpendicolarmente alla curva con velocità $(-\dot{\beta}(t), \dot{\alpha}(t))$, dopo un tempo s si trova in posizione $v(t,s)$.