II Prova parziale scritta di Analisi Matematica II
Ingegneria Edile-Architettura, 17 febbraio 2011

Nome..**Cognome**.. **Matricola**................

Prova orale verso: *l'inizio* | *la fine* dell'appello; **non** nel *mattino* | *pomeriggio* del giorno (Cancellare la voce che non interessa).

(1) [**20 pti**] Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq z \leq 1,\ y \geq 0 \right\}.$$

(1.1) Fare un disegno *qualitativo* di Ω.

(1.2) Parametrizzare $\partial\Omega$ e dire se la parametrizzazioni scelte sono o meno compatibili con il campo ν normale a $\partial\Omega$ esternamente a Ω.

(1.3) Sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale. Scrivere *una* formula esplicita che dia il flusso $\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu d\sigma$ di F attraverso $\partial\Omega$.

(1.4) Calcolare il flusso di cui al punto (1.4) quando $F(x, y, z) = (xe^z, ye^z, e^{3x+2y})$.

(1.5) . Sia $\Sigma = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z \leq 1,\ y \geq 0 \right\}$. Parametrizzare *le curve* di cui il bordo $\partial\Sigma$ della *superficie* Σ è costituita. Dire se le parametrizzazioni scelte sono compatibili con la scelta μ della normale a Σ per cui $\mu = -\nu$ (ν essendo la normale di cui al punto (1.2)).

(1.6) Calcolare $\iint_{(\Sigma,\mu)} (\nabla \times G) \cdot d\sigma$, con $G \in C^1(\Sigma, \mathbb{R}^3)$, $G(x, y, z) = (y, -x, z)$.

(2) [**4 pti**] Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è esatto e, per quei valori, calcolarne il potenziale; dove

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + 16y^4 + 1} + \sin(x), \frac{\alpha y^3}{x^2 + 16y^4 + 1} + \cos(y) \right).$$

(3) [**6 pti**] Sia $A = \{(x, y) : \ 0 \leq 2x + 3y \leq \pi, \ 0 \leq 3x - 2y \leq 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\iint_A \sin(2x + 3y) dx dy.$$

(4) [**3 pti**] Siano $F = (P, Q, R) \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ un campo liscio e sia, per ogni t in $\mathbb{R}$, $\gamma_t : [0, t] \to \mathbb{R}^3$,

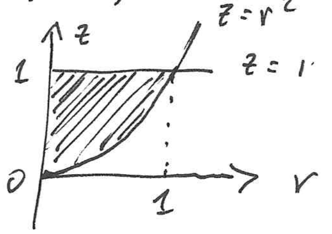
$$\gamma_t(s) = (\cos(s), \sin(s), s).$$

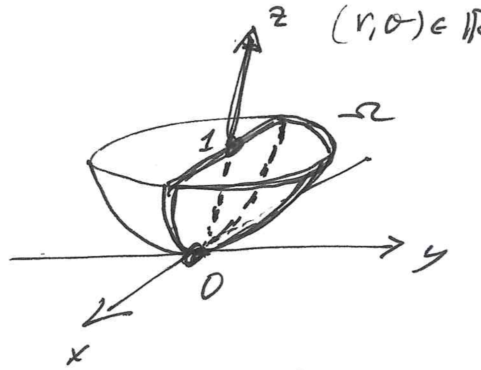
Sia $\varphi(t)$ il lavoro di F lungo γ_t. Calcolare $\dot{\varphi}(t)$.

[**Suggerimento:** gran parte dell'esercizio consiste nel leggere il testo.]

(1.1) $\Omega = \{(x,y,z): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \le z \le 1;\ y\ge 0\}$. In coordinate cilindriche $\begin{cases} x = 2r\cos\theta \\ y = 3r\sin\theta\end{cases}$ $(r,\theta)\in\mathbb{R}^+\times[0,2\pi]$

$$\begin{cases} r^2\le z\le 1\\ 0\le\theta\le\pi \\ r\ge 0\end{cases}$$





(1.2) $\Sigma_1 = \Phi_1(A_1)$; $A_1=\{(x,y): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1;\ y\ge0\}$

$\Phi_1(x,y)=(x,y,1)$; $\Phi_1: A_2\to\mathbb{R}^3$; $\Sigma_1 = \{(x,y,1): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1;\ y\ge 0\}\subseteq\mathbb{R}^3$.

$(\partial_x\Phi_1\times\partial_y\Phi_2)(x,y) = \begin{vmatrix} i&j&k\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix} = (0,0,1)$: compatibile con ν

$\Sigma_2=\Phi_2(A_2)=\{(x,0,z): \frac{x^2}{4}\le z\le1\}\subseteq\mathbb{R}^3$; $A_2=\{(x,z): \frac{x^2}{4}\le z\le 1\}\subseteq\mathbb{R}^2$;

$\Phi_2(x,z)=(x,0,z)$; $(\partial_x\Phi_2\times\partial_z\Phi_2)(x,z) = \begin{vmatrix} i&j&k\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix} = (0,-1,0)$: compatibile con ν.

$\Sigma_3=\Phi_3(A_3)=\{(x,y,z): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z;\ z\le1;\ y\ge0\}$; $A_3=\{(r,\theta): 0\le r\le1;\ 0\le\theta\le\pi\}$

$\Phi_2(r,\theta) = (2r\cos\theta; 3r\sin\theta; r^2)$; $(\partial_r\Phi_3\times\partial_\theta\Phi_3)(r,\theta) = \begin{vmatrix} i&j&k\\ 2\cos\theta & 3\sin\theta & 2r\\ -2r\sin\theta & 3r\cos\theta & 0\end{vmatrix} =$

$=(-6r^2\cos\theta, -4r^2\sin\theta, 6r)$ non è compatibile con ν perché punta verso l'alto ($6r>0$), mentre ν punta verso il basso.

(1.3) Senza T. div.: $\iint_{\partial\Omega} F\cdot\nu\, d\sigma = \iint_{A_1} R(x,y,1)\,dx\,dy - \iint_{A_2} Q(x,0,z)\,dx\,dz$

$- \iint_{A_3} F(2r\cos\theta; 3r\sin\theta; r^2)\cdot(-6r^2\cos\theta, -4r^2\sin\theta, 6r)\,dr\,d\theta$; $F=(P,Q,R)$

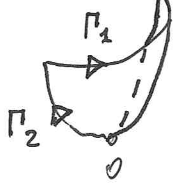
Con il T. della div.: $\iint_{\partial\Omega} F\cdot\nu\,d\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div}F\,dx\,dy\,dz =$

$=\int_0^\pi d\theta\int_0^1 6r\,dr\int_{r^2}^1 dz\ \operatorname{div}F(2r\cos\theta; 3r\cos\theta; z)$.

(1.4) $\operatorname{div}F(x,y,z) = e^z+e^z+0 = 2e^z \Rightarrow \iint_{\partial\Omega}F\cdot\nu\,d\sigma = \int_0^\pi d\theta\int_0^1 6r\,dr\int_{r^2}^1 2e^z\, dz$

$=6\pi\int_0^1 (e-e^{r^2})2r\,dr = 6\pi\cdot(er^2-e^{r^2})\Big|_0^1 = 6\pi(e-e+1)=6\pi$

(1.5) $\Sigma = \Sigma_3$ in (1.2). $\Gamma_1(\theta)=(2\cos\theta, 3\sin\theta, 1)$; $\Gamma_1:[0,\pi]\to\mathbb{R}^3$



$\Gamma_1([0,\pi]) = \{(x,y,z): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = z = 1;\ y\ge0\}$

$\Gamma_2(x)=(x,0,\frac{x^2}{4})$; $\Gamma_2:[-2,2]\to\mathbb{R}^3$; $\Gamma_2([-2,2])=\{(x,0,z): \frac{x^2}{4} = z\le1\}$

Γ_1 e Γ_2 non sono compatibili con ν, quindi ~~non~~ sono compatibili con μ.

(1b6) Uso il T. di Stokes: $\dot{\Gamma}_1(\theta)=(-2\sin\theta, 3\cos\theta, 0)$; $\dot{\Gamma}_2(x)=(1,0,x/2)$:

$$\iint_{(\Sigma,\mu)} (\nabla\times G)\cdot\mu\, d\sigma = \iint_{\partial(\Sigma,\mu)} G\cdot dz = +\int_{\Gamma_1} G\cdot dz + \int_{\Gamma_2} G\cdot dz = +\int_0^\pi (3\sin\theta, -2\cos\theta, 1)\cdot(-2\sin\theta, 3\cos\theta, 0)\,d\theta$$

$$+ \int_{-2}^{2} \left(0,-x,\frac{x^2}{4}\right)\cdot\left(1,0,\frac{x}{2}\right)dx = -\int_0^\pi 6(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\,d\theta - \int_{-2}^{2} \frac{x^3}{8}\,dx = -6\pi$$

Se non uso il T. di Stokes, $\nabla\times G(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & -x & z\end{vmatrix}$ $= (0,0,-2)$, quindi

$$\iint_{(\Sigma,\mu)} \nabla\times G\cdot d\sigma = \iint_{\Sigma} (\nabla\times G)\cdot\mu\, d\sigma = +\int_0^1 dr\int_0^\pi d\theta\,(0,0,-2)\cdot(-6r^2\cos\theta, -4r^2\sin\theta, 6r)$$
$$= -6\pi.$$

(2) $F=(P,Q)$: $\partial_y P(x,y) = -(x^2+16y^4+1)^{-2}\cdot 16\cdot 4\cdot y^3\cdot x$

$\partial_x Q(x,y) = -(x^2+16y^4+1)^{-2}\cdot 2\cdot x\cdot \alpha y^3$ $\Rightarrow$ chiuso sse esatto sse $\alpha=16\cdot 2=32$

Potenziale: $\varphi(x,y) = \int\left(\frac{x}{x^2+16y^4+1} + \sin x\right)dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^2+16y^4+1} + (-\cos x) + c(y) = \frac{1}{2}\log(x^2+16y^4+1) - \cos(x) + c(y)$$

$$\partial_y \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\cdot\frac{16\cdot 4\cdot y^3}{x^2+16y^4+1} + c'(y) = \frac{32y^3}{x^2+16y^4+1} + c'(y) = Q(x,y) \Leftrightarrow c'(y)=\cos(y)$$

Quindi $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+16y^4+1) - \cos(x) + \sin(y) + k$ ($k\in\mathbb{R}$, fissato).

(3) Pongo $u = 2x+3y$; $v = 3x-2y$; $du\,dv = \left|\det J\begin{pmatrix} u & v\\ x & y\end{pmatrix}\right| dx\,dy$

$$= \left|\det\begin{pmatrix} 2 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}\right| dx\,dy = |-4-9|\,dx\,dy = 13\cdot dx\,dy$$

$$\Rightarrow \iint_A \sin(2x+3y)\,dx\,dy = \frac{1}{13}\int_0^\pi du\int_0^{2\pi} dv\cdot \sin u = \left(\frac{-\cos u}{13}\right)\Big|_{u=0}^{\pi}\cdot 2\pi = \frac{4}{13}\pi.$$

(4) $\varphi(t) = \int_{\gamma_t} F\cdot dz = \int_0^t F(\cos(s), \sin(s), s)\cdot(-\sin(s), \cos(s), 1)\,ds$,

poiché $\dot{\gamma}_t(s) = (-\sin(s),\cos(s),1)$. Per T.F.C.I.,

$\dot{\varphi}(t) = F(\cos(t),\sin(t),t)\cdot(-\sin(t),\cos(t),1)$.

Prova scritta complessiva di Analisi Matematica II
Ingegneria Edile-Architettura, 17 febbraio 2011

Nome.. **Cognome**... **Matricola**................

Prova orale verso: *l'inizio* | *la fine* dell'appello; **non** nel *mattino* | *pomeriggio* del giorno (Cancellare la voce che non interessa).

(1) **[10 pti]** Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq z \leq 1, \ y \geq 0 \right\}.$$

(1.1) Fare un disegno *qualitativo* di Ω.

(1.2) Parametrizzare $\partial\Omega$ e dire se la parametrizzazioni scelte sono o meno compatibili con il campo ν normale a $\partial\Omega$ esternamente a Ω.

(1.3) Sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale. Scrivere *una* formula esplicita che dia il flusso $\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu d\sigma$ di F attraverso $\partial\Omega$.

(1.4) Calcolare il flusso di cui al punto (1.4) quando $F(x, y, z) = (xe^z, ye^z, e^{3x+2y})$.

(1.5) . Sia $\Sigma = \left\{ (x, y, z) : \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z \leq 1, \ y \geq 0 \right\}$. Parametrizzare *le curve* di cui il bordo $\partial\Sigma$ della *superficie* Σ è costituita. Dire se le parametrizzazioni scelte sono compatibili con la scelta μ della normale a Σ per cui $\mu = -\nu$ (ν essendo la normale di cui al punto (1.2)).

(1.6) Calcolare $\iint_{(\Sigma,\mu)} (\nabla \times G) \cdot d\sigma$, con $G \in C^1(\Sigma, \mathbb{R}^3)$, $G(x, y, z) = (y, -x, z)$.

(2) [4 pti] Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è esatto e, per quei valori, calcolarne il potenziale; dove

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2 + 16y^4 + 1} + \sin(x), \frac{\alpha y^3}{x^2 + 16y^4 + 1} + \cos(y) \right).$$

(3) [4 pti] Sia Sia $A = \{(x,y) : \ 0 \leq 2x + 3y \leq \pi, \ 0 \leq 3x - 2y \leq 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\iint_A \sin(2x + 3y) dxdy.$$

(4) [8 pti] Classificare i punti critici di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (2x + 3y)e^{-4x^2 - 9y^2}$.

(5) [4 pti] Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + 4x = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1. \end{cases}$$

(6) [3 pti] Siano $F = (P, Q, R) \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ un campo liscio e sia, per ogni t in $\mathbb{R}$, $\gamma_t : [0,t] \to \mathbb{R}^3$,

$$\gamma_t(s) = (\cos(s), \sin(s), s).$$

Sia $\varphi(t)$ il lavoro di F lungo γ_t. Calcolare $\dot{\varphi}(t)$.

[**Suggerimento:** gran parte dell'esercizio consiste nel leggere il testo.]

AM2-Tot.) Esercizi (1), (2), (3), (6): vedi prove parziali. (1

(4) $f(x,y) = (2x+3y)\cdot e^{-4x^2-9y^2}$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = [2 + (2x+3y)\cdot(-8x)]\cdot e^{-4x^2-9y^2} = 2\cdot[1-8x^2-12xy]\cdot e^{-4x^2-9y^2} \\ f_y(x,y) = [3+(2x+3y)\cdot(-18y)]\cdot e^{-4x^2-9y^2} = 3\cdot[1-12xy-18y^2]\cdot e^{-4x^2-9y^2} \end{cases}$$

Poiché $e^t > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$, $\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} (2x+3y)\cdot 4x = 1 & (A) \\ (2x+3y)\cdot 6y = 1 & (B) \end{cases}$

Nessuna soluzione avendosi per $x=0$ o $y=0$, divido le equazioni: $1 = \frac{6y}{4x} = \frac{3y}{2x}$, cioè $y = \frac{2}{3}x$. Sostituisco nella (A): $1 = 4x\cdot\left(2x + 3\cdot\frac{2}{3}x\right) = 16\cdot x^2 \iff x = \pm\frac{1}{4}$

Punti critici: $P = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{6}\right)$; $Q = \left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{6}\right)$.

$$f_{xx}(x,y) = 2\cdot\left[-(16x+12y) + (1-8x^2-12xy)\cdot(-8x)\right]\cdot e^{-4x^2-9y^2}$$

$$f_{xy}(x,y) = 2\cdot\left[-12x + (1-8x^2-12xy)\cdot(-18y)\right]\cdot e^{-4x^2-9y^2}$$

$$f_{yy}(x,y) = 3\cdot\left[-(12x+36y) + (1-12xy-18y^2)\cdot(-18y)\right]\cdot e^{-4x^2-9y^2}$$

Ricordo che nei punti critici $1-8x^2-12xy = 0 = 1-12xy-18y^2$.
Devo studiare quindi (nei p.ti critici) la matrice:

$$e^{-4x^2-9y^2}\begin{bmatrix} 2(-(+16x+12y)) & -12x \\ -12x & 3(-(12x+36y)) \end{bmatrix}, \text{ cioè: } \begin{bmatrix} -(8x+6y) & -3x \\ -3x & -(9x+18y) \end{bmatrix}$$

raccolgo fattori positivi, che non considero

Ho quindi:

$$(-1)(\pm)\begin{bmatrix} \frac{8}{4}+\frac{6}{6} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{9}{4}+\frac{18}{6} \end{bmatrix} = \pm(-1)\begin{bmatrix} 3 & 3/4 \\ 3/4 & 21/4 \end{bmatrix} = \pm(-1)\cdot M$$

La matrice M è def. pos. $\Rightarrow$ Hess $f(P)$ è def. neg; Hess $f(Q)$ def. pos.
$\Rightarrow$ P è p.to di max. rel, Q p.to di min. rel.

(5) $\lambda^2+4=0$; $\lambda = \pm 2i$. I.G.: $x(t) = A\cdot\cos(2t) + B\cdot\sin(2t)$ e $0 = x(0) = A$.
$\Rightarrow \dot{x}(t) = 2B\cos(2t)$ e $1 = \dot{x}(0) = 2B \iff B = \frac{1}{2}$: $\boxed{x(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)}$

Prova scritta di Analisi Matematica L-B
17 febbraio 2011

Nome...**Cognome**... **Matricola**................

(1) [**4 pti**] Sia Sia $A = \{(x, y) : \ 0 \leq 2x + 3y \leq \pi, \ 0 \leq 3x - 2y \leq 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\iint_A \sin(2x + 3y) dx dy.$$

(2) [**8 pti**] Classificare i punti critici di $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = (2x + 3y)e^{-4x^2 - 9y^2}$.

(3) [**4 pti**] Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + 5x = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1. \end{cases}$$

(4) [3 pti] Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e sia $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\Phi(x, y, z) = x \cdot f(y, z).$$

Calcolare la matrice hessiana di Φ.

(5) [5 pti] Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme

$$\Omega = \left\{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 \leq 4, \ x \leq 0, \ |z| \leq 1\right\}.$$

e $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ continua.

Trovare $A \subset \mathbb{R}^2$ e, per $(y, z) \in \mathbb{R}^2$, trovare $\alpha(y, z), \beta(y, z) \in \mathbb{R}$, tali che

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\,dxdydz = \iint_A \left[\int_{\alpha(y,z)}^{\beta(y,z)} f(x, y, z)\,dx\right] dydz$$

(6) [3 pti] Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^6 + 5iz^3 - 6 = 0.$$

(7) [3 pti] Trovare i valori di $\gamma \geq 0$ tali che converga l'integrale generalizzato:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x^{13\gamma} + x^{17\gamma}}\,dx.$$

AM-LB) ES. (1): correzione Panzioli AM2.

ES. (2), (3): correzione complessivo AM2.

ES. (6): correzione complessivo AM1.

(4) $\Phi_x = f(y,z)$; $\Phi_y = x \cdot f_y(y,z)$; $\Phi_z = x \cdot f_z(y,z)$; quindi:

$$\text{Hess}\,\Phi(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & \partial_y f(y,z) & \partial_z f(y,z) \\ \partial_y f(y,z) & x \cdot \partial_{yy} f(y,z) & x \cdot \partial_{yz} f(y,z) \\ \partial_z f(y,z) & x \cdot \partial_{yz} f(y,z) & x\, \partial_{zz} f(y,z) \end{bmatrix}$$

(5) $A = \{(y,z) : \exists x \in \mathbb{R}$ t.c. $(x,y,z) \in \Omega\} = \{(y,z) : |z| \leq 1;\ y^2 \leq 4\}$

$= [-2,2] \times [-1,1]$ e, se $(y,z) \in A$; $(x,y,z) \in \Omega \iff x^2 + y^2 \leq 4$,

quindi $-\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}$: $\alpha(y,z) = -\sqrt{4-y^2}$

$\beta(y,z) = \sqrt{4-y^2}$

(7) Per $x \to +\infty$, $1 - e^{-x} \underset{x \to \infty}{\sim} 1$, quindi

$$\frac{1-e^{-x}}{x^{13\gamma} + x^{17\gamma}} \underset{x \to \infty}{\sim} \frac{1}{x^{17\gamma}} \text{ : voglio } 17\gamma > 1 ; \boxed{\gamma > 1/17}$$

Per $x \to 0^+$, $1 - e^{-x} = 1 - (1 - x + o(x^2)) = x + o(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$

$$\Rightarrow \frac{1-e^{-x}}{x^{13\gamma} + x^{17\gamma}} \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{x}{x^{13\gamma}} = \frac{1}{x^{13\gamma - 1}} \text{ ; voglio } 13\gamma - 1 < 1 ; \ \gamma < \frac{2}{13}$$

L'integrale converge $\iff$ $\boxed{\frac{1}{17} < \gamma < \frac{2}{13}}$