Prova scritta di Analisi Matematica L-B

2 febbraio 2011

Nome...**Cognome**.. **Matricola**................

Prova orale verso: non nel giorno..................................

(1) [4 **pti**] Sia $A = \{(x, y) : |2x + 3y| \leq 1, \ |3x - 2y| \leq 1|\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\iint_A e^{2x+3y}\,dxdy.$$

(2) [8 **pti**] Classificare i punti critici di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 8x^3y + 8x^2y^2 + 2xy^3 - 6xy + 7$.

(3) [4 **pti**] Trovare l'integrale generale di $\ddot{x}(t) - 4t\dot{x}(t) = 0$. (Se trovate una funzione integrale che non sapete come calcolare, lasciatela scritta come funzione integrale: il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale vi darà comunque le soluzioni desiderate).

(4) [3 pti] Sia $\Gamma = (\alpha, \beta, \gamma) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$. $(x, y, z) = \Phi(u, v, t) = (u, v, 0) + \Gamma(t)$ (cioè, a (u, v, t) si associa il punto raggiunto dalla curva Γ al tempo t, traslato di un vettore $(u, v, 0)$). Calcolare la matrice jacobiana e il determinante Δ della matrice Jacobiana di Φ.

$$J\Phi(u,v,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dot{\alpha}(t) \\ 0 & 1 & \dot{\beta}(t) \\ 0 & 0 & \dot{\gamma}(t) \end{pmatrix} ; \det(J\Phi(u,v,t)) = \dot{\gamma}(t)$$

(5) [5 pti] Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}} - 2 \leq z \leq 2 \right\}.$$

e $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ continua.

Trovare $A \subset \mathbb{R}^2$ e, per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, trovare $\alpha(x, y), \beta(x, y) \in \mathbb{R}$, tali che

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)dxdydz = \iint_A \left[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)dz \right] dxdy$$

$$A = \left\{ (x,y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 16 \right\} \text{ e } \quad \alpha(x,y) = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}} - 2$$

$$\beta(x,y) = 2$$

(6) [3 pti] Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$(2 + i3)z^2 - 4z + (2 - i3) = 0$$

e calcolarne la parte reale.

$$z_1 = 1 \qquad \Big| \qquad \mathrm{Re}\, z_1 = 1$$

$$z_2 = -\frac{5}{13} - \frac{12}{13} i \qquad \Big| \qquad \mathrm{Re}\, z_2 = -\frac{5}{13}$$

(7) [3 pti] Trovare i valori di $\gamma \geq 0$ tali che converga l'integrale generalizzato:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x^2}}{x^{5\gamma} + x^{9\gamma}} dx.$$

$$1/9 < \gamma < 3/5$$

AM-LB | Esercizi (1), (2), (3), (4) sono nelle soluz. degli scritti di Analisi Matematica II. 1

(5) $A = \{(x,y) : \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}} - 2 \le 2\} = \{(x,y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 16\} \subseteq \mathbb{R}^2$

e, per $(x,y) \in A$, $\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}} - 2 = \alpha(x,y)$ e $2 = \beta(x,y)$:

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\{(x,y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 16\}} \left\{ \int_{\sqrt{x^2/4 + y^2/9} - 2}^{2} f(x,y,z)\,dz \right\} dx\,dy}$$

(6) $\frac{\Delta}{4} = (-2)^2 - (2+i3)\cdot(2-i3) = 4 - (4+9) = -9 = (3i)^2$

$\Rightarrow z = \dfrac{2 \pm 3i}{2+3i}$ $\qquad z_1 = \dfrac{2+3i}{2+3i} = 1$

$z_2 = \dfrac{2-3i}{2+3i} = \dfrac{(2-3i)^2}{(2+3i)(2-3i)} =$

$= \dfrac{4 - 12i - 9}{13} = -\dfrac{5}{13} - \dfrac{12}{13}i$

$\boxed{z_1 = 1;\ z_2 = -\frac{5}{13} - \frac{12}{13}i}$ $\boxed{Re(z_1) = 1;\ Re(z_2) = -\frac{5}{13}}$

(7) Per $x \to \infty$: $1 - e^{-x^2} \to 1$, quindi

$f(x) = \dfrac{1 - e^{-x^2}}{x^{5\gamma} + x^{9\gamma}} \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{5\gamma} + x^{9\gamma}} \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{9\gamma}}$: l'int. conv. a $+\infty$ sse $\gamma > 1/9$

Per $x \to 0$; $1 - e^{-x^2} = 1 - (1 - x^2 + o(x^2)) = x^2 \cdot (1 + o(1))$, quindi

$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{x^{5\gamma} + x^{9\gamma}} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{x^{5\gamma}} = \dfrac{1}{x^{5\gamma - 2}}$: l'int. conv. a 0 sse $5\gamma - 2 < 1$, $\gamma < 3/5$

L'integrale converge sse

$$\boxed{1/9 < \gamma < 3/5}$$