Prova scritta di Analisi Matematica L-B
19 gennaio 2011

Nome..**Cognome**.. **Matricola**................

Prova orale verso: non nel giorno..................................

(1) [**4 pti**] Sia $A = \{(x, y) : \ 0 \leq y \leq (|x| - 1)^2\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\iint_A e^{-x} dx dy.$$

(2) [**8 pti**] Classificare i punti critici di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^4 - x^2y^2 - 5x^2 + 4y^2$.

(3) [**4 pti**] Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = \sin(t) \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

(4) **[3 pti]** Sia $F(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Siano inoltre $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h = h(x,y)$, e $g(r,\theta) = h(F(r,\theta))$. Sapendo che $\frac{\partial h}{\partial x}(-1,0) = \pi$ e $\frac{\partial h}{\partial y}(-1,0) = e$, calcolare $\nabla g(1,\pi)$.

(5) **[5 pti]** Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : \ x^2 + y^2 \le 4, \ x \le 0, \ |z| \le 1\right\}.$$

e $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ continua.

Trovare $A \subset \mathbb{R}^2$ e, per $(y,z) \in \mathbb{R}^2$, trovare $\alpha(y,z), \beta(y,z) \in \mathbb{R}$, tali che

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_A \left[\int_{\alpha(y,z)}^{\beta(y,z)} f(x,y,z)dz\right] dydz$$

(6) **[3 pti]** Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^4 + 5iz^2 - 6 = 0.$$

(7) **[3 pti]** Trovare i valori di $\gamma \ge 0$ tali che converga l'integrale generalizzato:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x^{3\gamma} + x^{7\gamma}} dx.$$

AM-L-B.

① Vedi svolgimento AM II – complessivo (altri parametri)

② Vedi AM II – altri parametri

③ Vedi AM II – altri parametri

④ $\partial_\theta g(r,\theta) = \partial_x h(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot(-r\sin\theta) + \partial_y h(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\cos\theta$

$\partial_r g(r,\theta) = \partial_x h(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot\cos\theta + \partial_y h(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot\sin\theta$

$$\boxed{\nabla g(1,\pi) = (\partial_r g(1,\pi), \partial_\theta g(1,\pi)) = (-\partial_x h(-1,0), -\partial_y h(-1,0)) = (-\pi, -e)}$$

⑤ ~~x = r cos θ~~
~~y = r sin θ~~
~~z = t~~

$$\boxed{A = \{(y,z) : y^2 \le 4;\ |z| \le 1\} = [-2,2]\times[-1,1]}$$

$\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ x \le 0 \end{cases}$ $\quad x^2 \le 4-y^2 \quad x \le 0 \quad \begin{cases} -\sqrt{4-y^2} \le x \le \sqrt{4-y^2} \\ x \le 0 \end{cases}$

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha(y,z) &= -\sqrt{4-y^2} \\ \beta(y,z) &= 0 \end{aligned}}$$

⑥ Pongo $w = z^2$: $w^2 + 5iw - 6 = 0$ $\quad \Delta = (5i)^2 + 6\cdot 4 = -25+24 = -1 = i^2$

$w = \dfrac{-5i \pm i}{2} = -3i, -2i$

$z^2 = -3i = 3\cdot e^{-i\pi/2} \iff z = \pm\sqrt{3}\cdot e^{-i\pi/4}$

oppure

$z^2 = -2i = 2\cdot e^{-i\pi/2} \iff z = \pm\sqrt{2}\cdot e^{-i\pi/4}$

$$\boxed{\begin{aligned} z_{1,2} &= \pm\sqrt{3}\cdot\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot(1-i) \\ z_{3,4} &= \pm\sqrt{2}\cdot[\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)] = \pm(1-i) \end{aligned}}$$

⑦ $x \to +\infty \Rightarrow f(x) := \dfrac{1-e^{-x}}{x^{3\gamma}+x^{7\gamma}} \sim \dfrac{1}{x^{7\gamma}}$: l'integrale converge se $7\gamma > 1$

$x \to 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1-(1-x+o(x))}{x^{3\gamma}+o(x^{3\gamma})} \sim \dfrac{x}{x^{3\gamma}} = \dfrac{1}{x^{3\gamma-1}}$: converge se $3\gamma-1<1$

Converge $\iff 7\gamma > 1$ e $3\gamma - 1 < 1 \iff$ $\boxed{1/7 < \gamma < 2/3}$