Prova scritta di Analisi Matematica L-B

21 aprile 2011

Nome..**Cognome**.. **Matricola**................

Prova orale verso: non nel giorno.................................

(1) [**4 pti**] Sia $A = \{(x,y):\ y \geq 0,\ y \geq x,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\iint_A xye^{x^2+y^2}\,dxdy.$$

(2) [**8 pti**] Classificare i punti critici di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + x^2y + 3xy^2 + 3y^3 - 4x - 4y + 3$.

(3) [**4 pti**] Trovare l'integrale generale di $\ddot{x} + 4x + \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{2}e^{2t} = 0.$.

(4) **[3 pti]** Sia $f \in C^1(R^3, R)$, e sia

$$g(x, y) = f(xy, xe^y, x - y).$$

Calcolare $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 0)$

(5) **[5 pti]** Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme

$$\Omega = \left\{(x, y, z) :\ 1 - z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ |z| \leq 2\right\}.$$

e $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ continua.

Trovare $A \subset \mathbb{R}^2$ e, per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, trovare $\alpha(x, y), \beta(x, y) \in \mathbb{R}$, tali che

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)dxdydz = \iint_A \left[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)dz\right] dxdy$$

(6) **[3 pti]** Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$(z^3 + 2 + 3i)(z^2 - (1 + i)2z + 4i) = 0$$

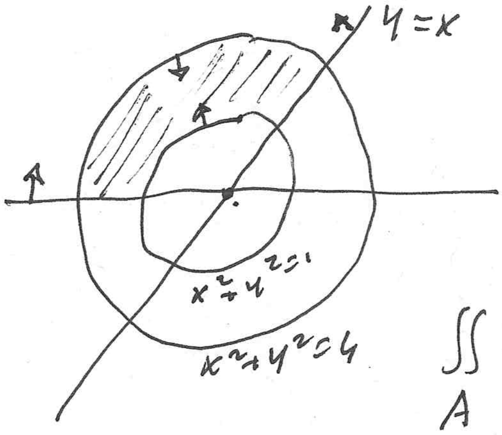
e calcolarne la parte reale.

(7) **[3 pti]** Trovare i valori di $\gamma \geq 0$ tali che converga l'integrale generalizzato:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(1 + x^\gamma)}{x^{2\gamma} + x^{3\gamma}} dx.$$

(LB) 1

① $A = \{(x,y) : y \geq 0;\ y \geq x;\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$



$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $r \geq 0,\quad \theta \in [0, 2\pi]$

$(x,y) \in A \iff 1 \leq r \leq 2$, $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$

$$\iint_A xy\, e^{x^2+y^2}\, dx\, dy = \int_1^2 r\, dr \int_{\pi/4}^{\pi} \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot r^2 e^{r^2}\, d\theta$$

$$= \int_1^2 r^3 e^{r^2}\, dr \cdot \int_{\pi/4}^{\pi} \cos\theta \cdot \sin\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_1^4 t e^t\, dt \cdot \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi$$

$t = r^2$
$\varphi = 2\theta$

$$= \left[\left(\frac{t e^t}{2}\right)_1^4 - \int_1^4 \frac{e^t}{2}\, dt\right] \cdot \left(-\frac{\cos\varphi}{2}\right)_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \left[\frac{(t+1)\, e^t}{4}\right]_1^4 \cdot \left[-\cos\varphi\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{(5e^4 - 2e)\cdot 1}{4}$$

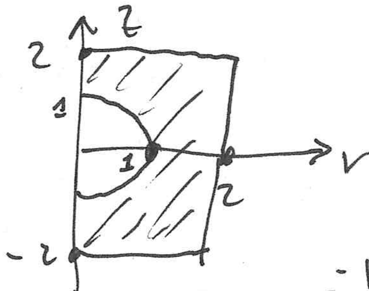
② Vedi Correzione TB

③ Vedi Correzione TB

④ Vedi Correzione TB

⑤ Pongo $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ con $r \geq 0,\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

$(x,y,z) \in A \iff 1 - z^2 \leq r^2 \leq 4;\ |z| \leq 2 \iff 1 \leq r^2 + z^2;\ 0 \leq r \leq 2;\ |z| \leq 2$



Se $x^2+y^2 \leq 1$, $\sqrt{1-(x^2+y^2)} \leq z \leq 2$ o $-2 \leq z \leq -\sqrt{1-(x^2+y^2)}$

Se $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$, $-2 \leq z \leq 2$.

Cioè $\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz =$

$$= \iint_{\{(x,y):\, x^2+y^2 \leq 1\}} \left\{ \int_{-2}^{-\sqrt{1-(x^2+y^2)}} f(x,y,z)\, dz + \int_{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}^{2} f(x,y,z)\, dz \right\} dx\, dy$$

$$+ \iint_{\{(x,y):\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}} \left\{ \int_{-2}^{2} f(x,y,z)\, dz \right\} dx\, dy$$

⑥ Vedi Correzione TB.

(7) Se $x \to 0^+$, $\dfrac{\log(1+x^\gamma)}{x^{2\gamma}+x^{3\gamma}} = \dfrac{x^\gamma + o(x^\gamma)}{x^{2\gamma}+x^{3\gamma}} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x^\gamma}$:

l'integrale converge su $(0,1] \iff 0 \le \gamma < 1$.

Se $x \to +\infty$, $\dfrac{\log(1+x^\gamma)}{x^{2\gamma}+x^{3\gamma}} = \dfrac{\log(x^\gamma \cdot (1+x^{-\gamma}))}{x^{2\gamma}+x^{3\gamma}} =$

$= \dfrac{\log(x^\gamma) + \log(1+x^{-\gamma})}{x^{2\gamma}+x^{3\gamma}} = \dfrac{\gamma \cdot \log(x) + \log(1+x^{-\gamma})}{x^{2\gamma}+x^{3\gamma}}$

$\underset{x\to+\infty}{\sim} \gamma \cdot \dfrac{\log x}{x^{3\gamma}}$: l'integrale diverge su $[1,+\infty)$

se $3\gamma \le 1$ (cioè $\gamma \le 1/3$), poiché in tal caso

$\dfrac{\log x}{x^{3\gamma}} \Big/ \dfrac{1}{x} = \dfrac{\log x}{x^{3\gamma-1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge.

Se $3\gamma > 1$, allora $\dfrac{\log x}{x^{3\gamma}} = \dfrac{\log x}{x^{\frac{3\gamma-1}{2}}} \cdot \dfrac{1}{x^{\frac{3\gamma-1}{2}+1}}$

Poiché $3\gamma-1>0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^{\frac{3\gamma-1}{2}}} = +\infty$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3\gamma-1}{2}+1}}$

converge: per confronto $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^{3\gamma}}\,dx$ converge.

Quindi l'integrale iniziale converge (assolutamente) sse $0 \le \gamma < 1$ su $(0,1]$ e sse $\gamma > 1/3$ su $[1,+\infty)$:

l'integrale converge sse $\boxed{\frac{1}{3} < \gamma \le 1}$