Prova scritta di Analisi Matematica T-B

11 giugno 2011

~~Per gli altri esercizi~~

Vero o Falso: ogni insieme misurabile è limitato. Falso: $\mathbb{R}^2$ è misurabile in $\mathbb{R}^2$ e non è limitato.

(1) Sia $A = \left\{(x,y) :\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \le 4,\ \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} \ge 1,\ y \ge 0\right\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\iint_A y\,dx\,dy.$$

(2) Classificare i punti critici di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{5} - 1\right) + 15$.

(3) Trovare l'integrale generale di $\ddot{x} + 9\dot{x} = 1 + \sin(3t)$.

(4) Sia $f \in C^1(R^2, R)$, e sia

$$g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

Calcolare $\frac{\partial g}{\partial r}(1, \frac{\pi}{2})$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(1, \frac{\pi}{2})$.

(5) Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme

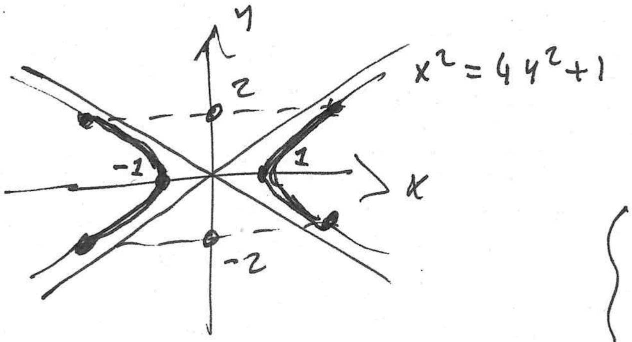
$$\Omega = \left\{(x,y,z) :\ 1 \le \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \le 4 - z,\ z \ge 0\right\}.$$

e $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ continua.

Trovare $A \subset \mathbb{R}^2$ e, per $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, trovare $\alpha(x,y), \beta(x,y) \in \mathbb{R}$, tali che

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_A \left[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dx\,dy$$

(6) [3 pti] Trovare il massimo e il minimo della funzione $f(x,y)3x - 2y$ sull'insieme $A = \{(x,y) :\ x^2 = 4y^2 + 1,\ y \in [-2,2]\}$.



$$g(x,y) = 4y^2 + 1 - x^2$$

$$\nabla(f - \lambda g)(x,y) = (3 - \lambda(-2x),\ -2 - \lambda(8y))$$

$$\begin{cases} 3 + 2\lambda x = 0 \\ 2 + 8\lambda y = 0 \\ x^2 = 4y^2 + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = -\frac{3}{2x} = -\frac{2}{8y} \\ x^2 = 4y^2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6y = x \\ x^2 = 4y^2 + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 6y \\ 36y^2 - 4y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pm \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{32}} = \pm \frac{1}{4\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \pm 2 \\ x = \pm\sqrt{17} \end{cases}$$

estremi della curva, 4 segni.

$$f(\pm\sqrt{17}, \pm 2) = \pm(3\sqrt{17} - 4)$$

$$f(\pm\sqrt{17}, \mp 2) = \pm(3\sqrt{17} + 4)$$

$$\boxed{\text{MAX } f = 3\sqrt{17} + 4;\ \min f = -(3\sqrt{17} + 4)}$$

$$f\left(\pm\frac{3}{2\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{4\sqrt{2}}\right) = \pm\left(\frac{9}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \pm\frac{4}{\sqrt{2}}$$

(7) [3 pti] Trovare i valori di $\gamma \ge 0$ tali che converga la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\gamma} \frac{(1 + 1/n)^\gamma - 1}{n}.$$

Per gli altri esercizi vedi la correzione di An. Mat. T-B già svolta