# Prova scritta di Analisi Matematica LB (23/1/2012)

Nome.............................................Cognome................................................ Matricola.................

**(1)** [3 pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$(z^2 - 2(1+i)z + 4i)(z^2 + 2z + 4) = 0$$

**(2)** [3 pt] Per quali valori di $\gamma \geq 0$ si ha la convergenza di

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^3} \left(\frac{t+1}{t}\right)^{2\gamma} dx$$

**(3)** **[4 pti]** Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) : \left(\sqrt{x^2+y^2} - 3\right)^2 + z^2 \leq 1 \right\}.$$

e $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ continua.

Trovare $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ e, per $z \in I$, trovare $A(z) \subseteq \mathbb{R}^2$, tali che

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int_I \left[ \iint_{A(z)} f(x,y,z)dxdy \right] dz$$

**(4)** **[5 pti]** Sia $A = \{(x,y) : (x-3)^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\iint_A x^2 dxdy.$$

**(5)** **[3 pti]** Trovare l'integrale generale di

$$y'' - 9y = \sin(3x) + e^{3x}$$

**(6)** **[4 pti]** Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(\rho, \varphi, \theta) = ((3 + \rho \cos \varphi) \cos \theta, (3 + \rho \cos \varphi) \sin \theta, \rho \sin \varphi).$$

Calcolare il determinante della matrice jacobiana di $F$.

**(7)** **[8 pti]** Classificare i punti critici di $f(x, y) = (y - 1 - 9x^2)y(y + 1) = 0$.

AMGB – 23/1/2012

gli esercizi (1), (2), (4), (5), (6) (7) sono svolti nelle correzioni dello scritto di Analisi Matematica II dello stesso giorno (vedi sopra).

(3) Poiché $\left(\sqrt{x^2+y^2}-3\right)^2 \geq 0$, con uguaglianza

se $\sqrt{x^2+y^2}=3$ (p. es. $(x,y)=(3,0)$),

esiste $(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x,y,z)\in\Omega \iff z^2\leq 1$

$\iff z\in[-1,1]$ : $\boxed{\alpha=-1,\ \beta=1}$

Per $z\in[-1,1]$, $\boxed{A(z)=\left\{(x,y) : \left(\sqrt{x^2+y^2}-3\right)^2 \leq 1-z^2\right\}}$.

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_{-1}^{1}\left\{\iint_{\left\{(x,y)\,:\,\left(\sqrt{x^2+y^2}-3\right)^2+z^2\leq 1\right\}} f(x,y,z)\,dx\,dy\right\}dz$$