Prova scritta di Analisi Matematica LB (13/2/2012)

Nome...Cognome.. Matricola..................

(1) [3 pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^6 - 6z^3 + 8 = 0$$

(2) [3 pt] Per quali valori di $\gamma > 0$ si ha la convergenza dell'integrale

$$\int_1^\infty \left(\cos\left(\frac{1}{x^{4\gamma}}\right) e^{\frac{1}{x^{4\gamma}}} - 1 \right) dx$$

(3) **[4 pti]** Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme $\Omega = \{(x, y, z) : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0, \ x + y + z \leq 1\}$. e $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ continua.

Trovare $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ e, per $z \in I$, trovare $A(z) \subseteq \mathbb{R}^2$, tali che

$$\iiint_\Omega f(x, y, z) dx dy dz = \int_I \left[\iint_{A(z)} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

(4) **[5 pti]** Sia $A = \left\{(x, y) : \ x > 0, \ y \geq 0, \ \arctan(y/x) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 \arctan(y/x)\right\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\iint_A \frac{dx dy}{9 + x^2 + y^2}.$$

(5) [3 pti] Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{t-4}{x-4} \\ x(0) = 6 \end{cases}$$

(6) [4 pti] Sia $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Definiamo $G : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, x) : \ x \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$,

$$G(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Calcolare

$$\partial_x G(x, y) + \partial_y G(x, y)$$

(7) [8 pti] Classificare i punti critici di $f(x, y) = (y - 1 + 9x^2)y(y + 1) = 0$.

AM - LB 13/2/2012. (Per gli altri esercizi, vedi AM II).
(Per l'equazione in $\mathbb{C}$ vedi AM I).

(3) $z \in [\alpha, \beta] \iff \exists\, x, y \geq 0 : \quad x + y \leq 1 - z \quad$ e $z \geq 0$

$\iff 0 \leq 1 - z$ e $z \geq 0 \iff 0 \leq z \leq 1$: $\boxed{\alpha = 0,\ \beta = 1}$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \Big\{ \iint_{\boxed{A(z) = \{(x,y):\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1-z\}}} f(x,y,z)\,dx\,dy \Big\}\,dz$$

(2) Per $x \to 1$ non c'è nessun problema.

Per $x \to \infty$, $\cos\left(\frac{1}{x^{4\delta}}\right) = 1 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x^{4\delta}}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{x^{4\delta}}\right)^2\right)$

e $e^{1/x^{4\delta}} = 1 + \frac{1}{x^{4\delta}} + o\left(\frac{1}{x^{4\delta}}\right)$ per Taylor

$\Rightarrow \cos\left(\frac{1}{x^{4\delta}}\right)\cdot e^{1/x^{4\delta}} - 1 = 1 + \frac{1}{x^{4\delta}} + o\left(\frac{1}{x^{4\delta}}\right) - 1 =$

$= \frac{1}{x^{4\delta}} + o\left(\frac{1}{x^{4\delta}}\right) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x^{4\delta}}$,

da cui integrale converge (per $x \to \infty$)

$\iff 4\delta > 1 \iff \delta > 1/4$