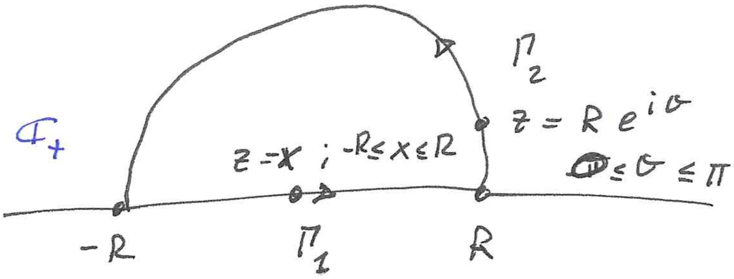
Integrali con i residui.

Funzioni Razionali.

(1) Integrali del tipo $\boxed{I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx}$

dove p, q sono polinomi, q non ha zeri ~~su~~ su $\mathbb{R}$ e grado(q) − grado$(p) \geq 2$.

Siano $z_1, \dots, z_\ell$ gli zeri di q nel semipiano superiore



$\mathbb{C}_+ = \{z = x+iy : y > 0\}$. Se $R > 0$, staranno tutti all'interno della curva $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ con

$\Gamma_1(x) = x$ $(-R \leq x \leq R)$ e $\Gamma_2(\theta) = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$.

Per il Teorema dei residui

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{p(z)}{q(z)}\,dz = \sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{Res}\left(\frac{p}{q}; z_j\right)$$

Mostriamo che $\lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz = 0.$ (*)

Ne segue che

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_1} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{Res}\left(\frac{p}{q}; z_j\right)}$$

Dimostrazione di (*). Se $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ con $a_0 \neq 0$

e $q(z) = b_0 z^m + \dots + b_m$ con $b_0 \neq 0$ e $m \geq n+2$, allora

$$\left| \frac{p(Re^{i\theta})}{q(Re^{i\theta})} \right| \leq \frac{|a_0| \cdot R^n + \dots + |a_n|}{|b_0| \cdot R^m - |b_1| R^{m-1} - \dots - |b_m|}$$ se $R > 0$ è abbastanza grande 0

$$\leq \frac{(|a_0| + \dots + |a_n|) R^n}{|b_0| R^m - (|b_1| + \dots + |b_m|) R^{m-1}} = \frac{|a_0| + \dots + |a_n|}{\{|b_0| \cdot R - (|b_0| + \dots + |b_m|)\} \cdot R^{m-}}$$

Poichè su Γ_2 $\quad dz = R i e^{i\theta} d\theta$,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{p(z)}{q(z)}\, dz\right| \le \frac{1}{2\pi i}\cdot \frac{|a_0|+\dots+|a_n|}{|b_0|\cdot R-(|b_1|+\dots+|b_m|)}\cdot\frac{R}{R^{m-n-1}}\cdot\int_0^{\pi} d\theta$$

$\xrightarrow[R\to\infty]{} 0$ poichè $m-n-2\ge 0$ per ipotesi.

Riguardo all' "abbastanza grande":

$|b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m| \ge |b_0||z|^m - |b_1||z|^{m-1} - \dots - |b_m|$

$= |b_0|R^m - |b_1|R^{m-1} - \dots - |b_m|$ (per la disuguaglianza triangolare) ~~Poichè~~

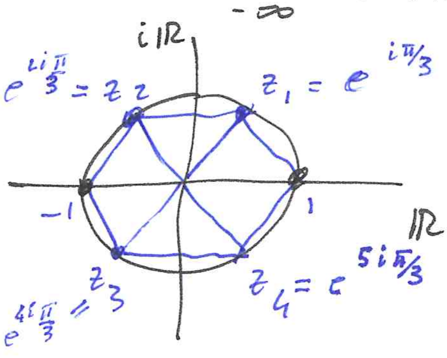
$= R^m\left(|b_0| - \frac{|b_1|}{R} - \dots - \frac{|b_m|}{R^m}\right) \xrightarrow[R\to\infty]{} +\infty$.

Quindi $|b_0|R^m - |b_1|R^{m-1} - \dots - |b_m| \ge 0$ se R è abbastanza grande,

e allora $$\frac{1}{|b_0 z^m+\dots+b_m|} \le \frac{1}{|b_0||z|^m - |b_1||z|^{m-1} - \dots - |b_m|}.$$ ∎

Esempi e esercizi.

(1.1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+1}$



Sia $q(z) = z^4+z^2+1 = \dfrac{z^6-1}{z^2-1}$.

Allora $q(z)=0 \iff z^6=1,\ z\ne\pm1$.

$z_1 = e^{i\pi/3} = \frac12 + i\frac{\sqrt3}{2}$

$z_2 = e^{2i\pi/3} = -\frac12 + i\frac{\sqrt3}{2}$ $\quad$ | radici di q in $\mathbb{C}^+$.

Sono radici semplici:

$q(z) = (z-z_1)\cdot r_1(z)$ con $r_1(z_1)\ne 0$

$q(z) = (z-z_2)\cdot r_2(z)$ con $r_2(z_2)\ne 0$

Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+1} = 2\pi i\cdot\left[\mathrm{Res}\left(\frac1q; z_1\right)+\mathrm{Res}\left(\frac1q; z_2\right)\right]$$

$$= 2\pi i\cdot\left[\lim_{z\to z_1}(z-z_1)\cdot\frac{1}{q(z)} + \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\cdot\frac{1}{q(z)}\right]$$

perchè le radici sono semplici.

Poichè $q(z) = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$ (vedi figura)

$$\lim_{z \to z_1} \frac{z-z_1}{q(z)} = \frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)}$$

$$\lim_{z \to z_1} \frac{z-z_2}{q(z)} = \frac{1}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)}$$

e $z_1 - z_3 = 2z_1 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)2 = 1+i\sqrt{3}$

$z_2 - z_4 = 2z_2 = -1+i\sqrt{3}$

$z_1 - z_4 = i\sqrt{3} = z_2 - z_3$

$z_1 - z_2 = 1$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1} = 2\pi i \cdot \left(+ \frac{1}{(1+i\sqrt{3})\, i\sqrt{3}} + \frac{1}{(-1+i\sqrt{3})\, i\sqrt{3}} \right)$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1-i\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}}{+1+3} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} : \quad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}}$$

(1.2) Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}\, dx$.

Soluzione: $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}}$

(1.3) Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4-x^2+1}$. Suggerimento: $z^6+1 = (z^2+1)(z^4-z^2+1)$

Soluzione $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4-x^2+1} = \pi}$

(1.4) Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1}$.

Soluzione: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \pi \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$