Analisi Matematica M: esercizi per la prova take-home del 9/1/2013.

Richiamo su alcune notazioni.

- $L^1(\mathbb{R})$ contiene le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tali che $\|f\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < \infty$.
- $L^2(\mathbb{R})$ contiene le $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tali che $\|f\|_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty$.
- $L^2([-\pi, \pi])$ contiene le $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ tali che $\|f\|_{L^2} = \left(\int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty$.
- $\ell^1(\mathbb{Z})$ contiene le successioni "bilatere" $\zeta : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ con $\|\zeta\|_{\ell^1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\zeta(n)| < \infty$.
- $\ell^2(\mathbb{Z})$ contiene le successioni "bilatere" $\zeta : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ con $\|\zeta\|_{\ell^2} = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\zeta(n)|^2\right)^{1/2} < \infty$.
- Se $A : H_1 \to H_2$ è un operatore lineare tra spazi di Hilbert,
$$|||A||| = \sup_{x \neq 0, x \in H_1} \frac{\|Ax\|_{H_2}}{\|x\|_{H_1}} = \sup_{\|x\|_{H_1}=1} \|Ax\|_{H_2} = \sup_{\|x\|_{H_1} \leq 1} \|Ax\|_{H_2}$$
è la sua *norma.*
- Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, la sua *trasformata di Fourier* $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è definita come
$$\hat{f}(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\zeta x} dx.$$
Vale l'importante *formula di Plancherel* (ha anche altri nomi):
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\zeta)|^2 d\zeta = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Etica.

Sono a conoscenza delle regole etiche per lo svolgimento della prova take-home.

(1) L'elaborato consegnato è frutto sostanzialmente del mio lavoro indivuduale.
(2) È lecito discutere con i miei compagni di corso di strategie e idee generali su come risolvere gli esercizi, ma non passarsi calcoli o soluzioni.
(3) Non è assolutamente permesso ricorrere all'aiuto di persone al di di fuori di chi ha seguito il corso.
(4) È lecito consultare fonti scritte di qualsiasi tipo.

Firmato ....

Svolgere due dei seguenti esercizi. Consegna entro le ore 17 del 9/1/2013.

(1) Scopo di questo esercizio è di introdurre uno spazio di Hilbert di funzioni olomorfe nel disco unitario e di trovare qualche formula interessante che lo riguarda. Sia $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ il disco unitario in $\mathbb{C}$ e per una funzione del tipo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{0.1}$$

dove gli a_n sono numeri complessi, si definisca la *norma di Bergman di* f come

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} \right)^{1/2}. \tag{0.2}$$

Lo spazio $\mathcal{B}$ contiene tutte le funzioni f per cui $\|f\|_{\mathcal{B}} < \infty$.

(a) Mostrare che per $0 < r < 1$ si ha che:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) r^n = \frac{1}{(1-r)^2}. \tag{0.3}$$

Suggerimento. Derivare la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$.

(b) Mostrare che se f è una funzione in $\mathcal{B}$, allora la serie (0.1) converge per ogni $z \in \Delta$.

(c) Data anche $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, $g \in \mathcal{D}$, definiamo il prodotto interno

$$< f, g >_{\mathcal{B}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \overline{b_n}}{n+1}. \tag{0.4}$$

Mostrare che $\mathcal{B}$ diventa così uno spazio pre-Hilbertiano. (Diamo in seguito per scontato che sia di Hilbert).

(d) Dato $w \in \Delta$, determinare $K_w \in \mathcal{B}$:

$$< f, K_w >_{\mathcal{B}} = f(w) \tag{0.5}$$

per ogni f in $\mathcal{B}$.

(e) Esprimere $K_w(z)$ in termini della funzione trovata al punto (a).

(f) Mostrare che

$$\|K_w\|_{\mathcal{B}}^2 = < K_w, K_w >_{\mathcal{B}} = \frac{1}{1-|w|^2}. \tag{0.6}$$

(g) Per $w \in \Delta$, sia $\eta_w : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ il funzionale lineare "valutazione in w":

$$\eta_w(f) = f(w). \tag{0.7}$$

Dedurre dalla precedente discussione (applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz a (0.5)) e dal teorema di Riesz-Fischer che: (i) η_w è limitato, $\eta_w \in \mathcal{B}^*$; (ii) $\|\eta_w\|_{\mathcal{B}^*} = \left(\frac{1}{1-|w|^2}\right)^{1/2}$.

- Mostrare che

$$\|f\|_{\mathcal{B}}^2 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} |f(x+iy)|^2 dxdy.$$

(2) Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato, sia $Tf : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt.$$

Vogliamo mostrare che vale la disuguaglianza:

$$\int_0^{+\infty} |Tf(x)|^2 dx \leq 4 \cdot \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 dx. \tag{0.8}$$

Nessuna costante più piccola di 4 rende l'uguaglianza vera.

- Mostrare che l'operatore $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ è lineare.
- Mostrare che

$$\int_0^{+\infty} |Tf(x)|^2 dx = 2 \cdot \int_0^{+\infty} f(y) \left[\frac{1}{y} \int_0^y f(z)dz \right] dydx. \tag{0.9}$$

- Osservato che (0.9) può essere scritto come

$$\|Tf\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = 2 < f, Tf >_{L^2(\mathbb{R})}, \tag{0.10}$$

  per funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f(x) = 0$ per $x < 0$, dedurre mediante la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz che, per tali funzioni,

$$\|Tf\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{0.11}$$

- Osservare che la deduzione precedente ha un baco: vale solo se $\|Tf\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty$! Rimediare a ciò, per esempio, approssimando la generica f mediante funzioni f_n in $L^2(\mathbb{R})$:

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) \text{ se } 0 \leq x \leq n, \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

- Essendo T lineare, verificare che (0.8) equivale alla disuguaglianza $|||T||| \leq 2$.

(3)

(a) Dati $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, verificare che

$$(A^2+B^2)\cdot(C^2+D^2) = (AC+BD)^2 + (AD-BC)^2. \tag{0.12}$$

(b) Estendere la disuguaglianza (0.12) mostrando che se $a_1, \ldots, a_N; b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{R}$, allora:

$$\left(\sum_{j=1}^N a_j^2\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^N b_j^2\right) = \left(\sum_{j=1}^N a_j b_j\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^N\sum_{k=1}^N (a_j b_k - b_j a_k)^2 . \tag{0.13}$$

(c) Estendere la relazione (0.13) al caso complesso:

$$\sum_{j=1}^N |z_j|^2 \cdot \sum_{j=1}^N |w_j|^2 = \left|\sum_{j=1}^N z_j \overline{w_j}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^N\sum_{k=1}^N |z_j w_k - w_j z_k|^2 . \tag{0.14}$$

(d) Verificare che in $\mathbb{C}$ vale l'identità:

$$(z+\overline{z})|^2 = 2\Re(z)|^2 = 2|z|^2 - 2\Re(z^2)$$

e dedurne che

$$4\sum_{j=1}^N |z_j|^2 \cdot \sum_{j=1}^N |z_j|^2 = \left|\sum_{j=1}^N (z_j\overline{w_j} + w_j\overline{z_j})\right|^2 + 2\sum_{j=1}^N\sum_{k=1}^N |z_j w_k - w_j z_k|^2 + 2\left[\left|\sum_{j=1}^N z_j\overline{w_j}\right|^2 - \Re\left(\sum_{j=1}^N z_j\overline{w_j}\right)^2\right]. \tag{0.15}$$

(e) Dedurre da (0.15) che vale disuguaglianza di tipo Cauchy-Schwarz

$$\left|\sum_{j=1}^N \Re(z_j\overline{w_j})\right|^2 \leq \sum_{j=1}^N |z_j|^2 \cdot \sum_{j=1}^N |z_j|^2. \tag{0.16}$$

(f) Mostrare che l'uguaglianza in (0.16) vale per una data scelta di $z = (z_1, \ldots, z_N)$ e $w = (w_1, \ldots, w_N)$ in $\mathbb{C}^N$ se e solo se

$$\sum_{j=1}^N z_j\overline{w_j} \in \mathbb{R} \text{ e i vettori } z \text{ e } w \text{ sono linearmente dipendenti in } \mathbb{C}^N. \tag{0.17}$$

(g) Dedurre da (0.14) che la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\left|\sum_{j=1}^N z_j\overline{w_j}\right|^2 \leq \sum_{j=1}^N |z_j|^2 \cdot \sum_{j=1}^N |z_j|^2, \tag{0.18}$$

con i relativi casi di uguaglianza.