Analisi Matematica M: esercizi per la prova take-home del 12/2/2013.

Richiamo su alcune notazioni.

- $L^1(\mathbb{R})$ contiene le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tali che $\|f\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < \infty$.
- $L^2(\mathbb{R})$ contiene le $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tali che $\|f\|_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty$.
- $L^2([-\pi,\pi])$ contiene le $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ tali che $\|f\|_{L^2} = \left(\int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty$.
- $\ell^1(\mathbb{Z})$ contiene le successioni "bilatere" $\zeta : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ con $\|\zeta\|_{\ell^1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\zeta(n)| < \infty$.
- $\ell^2(\mathbb{Z})$ contiene le successioni "bilatere" $\zeta : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ con $\|\zeta\|_{\ell^2} = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\zeta(n)|^2\right)^{1/2} < \infty$.
- Se $A : H_1 \to H_2$ è un operatore lineare tra spazi di Hilbert,
$$|||A||| = \sup_{x\neq 0, x\in H_1} \frac{\|Ax\|_{H_2}}{\|x\|_{H_1}} = \sup_{\|x\|_{H_1}=1} \|Ax\|_{H_2} = \sup_{\|x\|_{H_1}\leq 1} \|Ax\|_{H_2}$$
è la sua *norma*.
- Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, la sua *trasformata di Fourier* $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è definita come
$$\hat{f}(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\zeta x} dx.$$
Vale l'importante *formula di Plancherel* (ha anche altri nomi):
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\zeta)|^2 d\zeta = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx.$$
Sotto opportune ipotesi vale la *formula di inversone* per la trasformata di Fourier:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\zeta) e^{ix\zeta} d\zeta = 2\pi f(x).$$

Etica.

Sono a conoscenza delle regole etiche per lo svolgimento della prova take-home.

(1) L'elaborato consegnato è frutto sostanzialmente del mio lavoro indivuduale.
(2) È lecito discutere con i miei compagni di corso di strategie e idee generali su come risolvere gli esercizi, ma non passarsi calcoli o soluzioni.
(3) Non è assolutamente permesso ricorrere all'aiuto di persone al di di fuori di chi ha seguito il corso.
(4) È lecito consultare fonti scritte di qualsiasi tipo.

Firmato ....

Svolgere almeno due dei seguenti esercizi. Consegna entro le ore 12 del 13/2/2013 secondo una delle seguenti modalità: (i) invio di copia scannerizzata al mio indirizzo email; (ii) consegna presso la portineria del Dipartimento di Matematica.

(1) Sia H lo spazio delle funzioni $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tali per cui

$$(a)\ h \in L^2(\mathbb{R}),\ (b)\ \hat{h}(\xi) = 0 \text{ se } |\xi| \geq \pi.$$

Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ il prodotto interno in $L^2(\mathbb{R})$.

(i) Mostrare che H è un sottospazio chiuso di $L^2(\mathbb{R})$.

(ii) Mostrare che, se $h \in H$, allora:

$$(*) \text{ per ogni } \xi \in [-\pi, \pi] :\ \hat{h}(\xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\xi},\ \text{con } a_n = h(-n)$$

Suggerimento: (a) considerare $\hat{h}$ come una funzione in $L^2([-\pi, \pi])$ (basta restringerla all'intervallo) e svilupparla in serie di Fourier; quindi (b) osservare che, poiché $\hat{h}$ è supportata in $[-\pi, \pi]$, i coefficienti della serie di Fourier sono legati mediante inversione della trasformata di Fourier alla funzione h da cui siamo partiti.

(iii) Vero o falso?

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{h}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Giustificare la risposta.

(iv) Sia $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$\chi(\zeta) := \begin{cases} 1 \text{ se } |\zeta| \leq \pi; \\ 0 \text{ se } |\zeta| > \pi. \end{cases}$$

Mostrare che

$$\frac{1}{2\pi} \hat{\chi}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

(v) Utilizzare le risposte ai quesiti (ii), (iii), (iv) per mostrare che, se $h \in H$, allora vale a formula di campionamento:

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi(x+n))}{\pi(x+n)} h(-n).$$

(2) Sia H lo spazio di funzioni dell'esercizio (1) e a ogni $h \in H$ si associ la funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{izt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} h(t) e^{izt} dt.$$

Sia PW l'insieme della funzioni così ottenute.

(i) Mostrare che se $h \in H$, allora *per ogni* $z \in \mathbb{C}$ *fissato* la funzione $t \to h(t)e^{izt}$ sta in H.

(ii) *Vero o falso?* f è olomorfa in $\mathbb{C}$. **Suggerimento:** (a) mostrare che se $h \in H$ allora anche la funzione $t \to ith(t)$ sta in H; (b) dedurne, per esempio derivando sotto segno d'integrale, che esiste $f'(z)$ e che

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} ith(t) e^{izt} dt.$$

(iii) Siano f e g in PW,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} h(t) e^{izt} dt, \ g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} k(t) e^{izt} dt;$$

con $h, k \in H$. Si introduca il prodotto hermitiano

$$< f, g >_{PW} := < f, g >_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Mostrare che PW è un sottospazio chiuso di $L^2(\mathbb{R})$ e che $f \mapsto h$ è un'isometria suriettiva di PW su H.

(iv) Mostrare che PW ha nucleo riproducente: per ogni $w \in \mathbb{C}$ esiste una funzione K_w in PW tale per cui

$$f(w) = < f, K_w >_{PW}$$

per ogni $f \in PW$. Calcolare $K_w(z)$ per ogni $z, w \in \mathbb{C}$. **Nota:** può aiutare a esprimere in forma più compatta l'espressione di K_w la notazione

$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

valida per ogni z in $\mathbb{C}$.

(v) Si definisca la funzione *seno iperbolico* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Dedurre da (iv) e dal teorema di Riesz-Fischer che (a) ogni funzionale di valutazione $\eta_w : PW \to \mathbb{C}$,

$$\eta_w(f) = f(w),$$

è limitato e che (b) se $w = u + iv$, allora

$$\|\eta_w\|^2_{PW^*} = \frac{\sinh(2\pi v)}{2\pi v}.$$

Nota: osservate che

$$\lim_{v \to 0} \frac{\sinh(2\pi v)}{2\pi v} = 1,$$

quindi che la funzione $v \mapsto \frac{\sinh(2\pi v)}{2\pi v}$ (analogamente alla funzione sinc) è definita in $v = 0$.

(3) Sia $x \in \mathbb{R}$. Applicare il teorema dei residui alla funzione olomorfa $f_x(z) = \frac{e^{ixz}}{1+z^2}$ per trovare $\hat{f}(x)$, dove

$$f(x) = \frac{2}{1 + x^2}.$$

Suggerimento: le cose sono leggermente diverse per $x > 0$ e $x < 0$.