**Alcuni esercizi del tipo *take-home* per la prova scritta di Analisi Matematica M, parte di analisi funzionale.**

**Richiamo su alcune notazioni.**

- $L^1(\mathbb{R})$ contiene le funzioni $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ tali che $\|f\|_{L^1}=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<\infty$.
- $L^2(\mathbb{R})$ contiene le $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ tali che $\|f\|_{L^2}=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}<\infty$.
- $L^2([-\pi,\pi])$ contiene le $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ tali che $\|f\|_{L^2}=\left(\int_{-\pi}^{+\pi}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}<\infty$.
- $\ell^1(\mathbb{Z})$ contiene le successioni "bilatere" $\zeta:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ con $\|\zeta\|_{\ell^1}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\zeta(n)|<\infty$.
- $\ell^2(\mathbb{Z})$ contiene le successioni "bilatere" $\zeta:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ con $\|\zeta\|_{\ell^2}=\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\zeta(n)|^2\right)^{1/2}<\infty$.
- Se $A:H_1\to H_2$ è un operatore lineare tra spazi di Hilbert,
$$|||A|||=\sup_{x\neq0,x\in H_1}\frac{\|Ax\|_{H_2}}{\|x\|_{H_1}}=\sup_{\|x\|_{H_1}=1}\|Ax\|_{H_2}=\sup_{\|x\|_{H_1}\le1}\|Ax\|_{H_2}$$
è la sua *norma.*
- Se $f\in L^1(\mathbb{R})$, la sua *trasformata di Fourier* $\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ è definita come
$$\hat{f}(\zeta)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\zeta x}dx.$$
Vale l'importante *formula di Plancherel* (ha anche altri nomi):
$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(\zeta)|^2d\zeta=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx.$$

**(1)** Lo scopo finale dell'esercizio è dimostrare la *disuguaglianza di Hardy*. Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato, sia $Tf : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt.$$

Vogliamo mostrare che vale la disuguaglianza:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |Tf(x)|^2 dx \leq 4 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx. \tag{0.1}$$

Nessuna costante più piccola di 4 rende l'uguaglianza vera.

- Mostrare che l'operatore $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ è lineare.
- Mostrare che

$$\int_0^{+\infty} |Tf(x)|^2 dx = 2 \cdot \int_0^{+\infty} f(y) \left[ \frac{1}{y} \int_0^y f(z)dz \right] dydx. \tag{0.2}$$

  **Suggerimento:** espandere il quadrato e manipolare le tre variabili d'integrazione per riduzione.
- Osservato che (0.2) può essere scritto come

$$\|Tf\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = 2 < f, Tf >_{L^2(\mathbb{R})}, \tag{0.3}$$

  per funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f(x) = 0$ per $x < 0$, dedurre mediante la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz che, per tali funzioni,

$$\|Tf\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{0.4}$$

- Osservare che la deduzione precedente ha un baco: vale solo se $\|Tf\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty$! Rimediare a ciò, per esempio, approssimando la generica $f$ mediante funzioni $f_n$ in $L^2(\mathbb{R})$:

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) \text{ se } 0 \leq x \leq n, \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

  **Suggerimento:** verificare che (i) $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $L^2(\mathbb{R})$; (ii) calcolare $(Tf_n)(x)$ e verificare che $Tf_n$ sta in $L^2(\mathbb{R})$ e che ; (iii) dedurne correttamente che $\|Tf_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R})}$ e che $\lim_{n\to\infty} Tf_n = Tf$ in $L^2(\mathbb{R})$; (iv) concludere mostrando (0.4).
- Estendere (0.3) a funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tali che $f(x) = 0$ per $x < 0$ e dedurne (0.4) per le stesse funzioni.
- Utilizzare (0.4) ristretto alle funzioni tali che $f(x) = 0$ per $x < 0$ per dedurne il caso generale (0.1), con la stessa costante.
- Essendo $T$ lineare, verificare che (0.1) equivale alla disuguaglianza $|||T||| \leq 2$.

**(2)** Scopo di questo esercizio è di introdurre uno spazio di Hilbert di funzioni olomorfe nel disco unitario e di trovare qualche formula interessante che lo riguarda. Sia $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ il disco unitario in $\mathbb{C}$ e per una funzione del tipo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{0.5}$$

dove gli $a_n$ sono numeri complessi, si definisca la *norma di Dirichlet di* $f$ come

$$\|f\|_{\mathcal{D}} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)|a_n|^2 \right)^{1/2}. \tag{0.6}$$

Lo spazio $\mathcal{D}$ contiene tutte le funzioni $f$ per cui $\|f\|_{\mathcal{D}} < \infty$.

- Mostrare che per $0 < r < 1$ si ha che:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n+1} = \frac{1}{r} \log(1-r)^{-1}. \tag{0.7}$$

- Mostrare che se $f$ è una funzione in $\mathcal{D}$, allora la serie (0.5) converge per ogni $z \in \Delta$.
  **Suggerimento.** Mostrare prima che, se $|z| \leq r < 1$, allora (utilizzando (0.7))

$$\left| \sum_{n=M}^{N} a_n z^n \right| \leq \left( \sum_{n=M}^{N} (n+1)|a_n|^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{n=M}^{N} \frac{r^n}{n+1} \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{n=M}^{N} (n+1)|a_n|^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \frac{1}{r} \log(1-r)^{-1}. \right)^{1/2},$$

  e dedurne che la serie in (0.5) converge per ogni $z$ tale che $|z| \leq r$ (ma $0 < r < 1$ era arbitrario, quindi...).
- Data anche $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, $g \in \mathcal{D}$, definiamo il prodotto interno

$$< f, g >_{\mathcal{D}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n \overline{b_n}. \tag{0.8}$$

  Mostrare che $\mathcal{D}$ diventa così uno spazio pre-Hilbertiano. (Diamo in seguito per scontato che sia di Hilbert).
- Definiamo la funzione

$$h(z) = \log(1-z)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}. \tag{0.9}$$

  Verificare che la funzione è olomorfa in $\Delta$ e che (come è naturale attendersi!)

$$h'(z) = \frac{1}{1-z} \tag{0.10}$$

  in $\Delta$.
- Dato $w \in \Delta$, determinare $K_w \in \mathcal{D}$:

$$< f, K_w >_{\mathcal{D}} = f(w) \tag{0.11}$$

  per ogni $f$ in $\mathcal{D}$.
  **Suggerimento.** Cerchiamo $K_w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(w) z^n$, dove i coefficienti $c_n(w)$ sono da determinare. Ciò che vogliamo è

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = f(w) = < f, K_w >_{\mathcal{D}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n \overline{c_n(w)}.$$

  Da questa uguaglianza otteniamo facilmente i singoli $c_n(w)$, quindi l'espressione per $K_w$.
- Esprimere $K_w(z)$ in termini della funzione $h$ definita in (0.9).
- Mostrare che

$$\|K_w\|_{\mathcal{D}}^2 = < K_w, K_w >_{\mathcal{D}} = \frac{1}{|w|^2} \log\left( \frac{1}{1-|w|^2} \right). \tag{0.12}$$

- Per $w \in \Delta$, sia $\eta_w : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ il funzionale lineare "valutazione in $w$":

(0.13)
$$\eta_w(f) = f(w).$$

Dedurre dalla precedente discussione (applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz a (0.11)) e dal teorema di Riesz-Fischer che: (i) $\eta_w$ è limitato, $\eta_w \in \mathcal{D}^*$; (ii) $\|\eta_w\|_{\mathcal{D}^*} = \left(\frac{1}{|w|^2}\log\left(\frac{1}{1-|w|^2}\right)\right)^{1/2}$.

- Per $f$ come in (0.5), definire

$$[f]_{\mathcal{D}}^2 = \|f\|_{\mathcal{D}} = \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \leq \|f\|_{\mathcal{D}}^2.$$

Mostrare che

$$[f]_{\mathcal{D}}^2 = \frac{1}{\pi}\iint_{\Delta} |f'(x+iy)|^2 dxdy.$$

**Suggerimento.** Calcolare l'integrale in coordinate polari $x + iy = z = re^{it} \equiv (r\cos t, r\sin t)$, sviluppando $|f'(z)|^2$ in una serie a due indici e utilizzando le solite relazioni di ortogonalità tra funzioni del tipo $e^{int}$ per $t \in [-\pi, \pi]$.

**(3)** Lo scopo dell'esercizio è dimostrare la *disuguaglianza d'indeterminazione di Heisenberg*. Sia $S$ l'insieme dell funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tali che (i) $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e (ii) $f(x) = 0$ se $|x| \geq R$ (con $R > 0$ dipendente da $f$). Sia $S_{\mathbb{R}}$ il sottospazio delle $f$ in $S$ tali che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Mostrare che, se $f \in S_{\mathbb{R}}$, allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) f'(x) dx. \tag{0.14}$$

- Dedurne che per $f \in S_{\mathbb{R}}$ vale la disuguaglianza:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \leq 2 \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |x f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \tag{0.15}$$

- Da (0.15) e dalla formula di Perseval dedurre che per $f \in S_{\mathbb{R}}$ vale la disuguaglianza d'indeterminazione di Heisenberg:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |x f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\zeta \hat{f}(\zeta)|^2 d\zeta \right)^{1/2}. \tag{0.16}$$

- Mostrare che se $A, B, C, D \geq 0$, allora $(AC + BD)^2 \leq (A^2 + B^2) \cdot (C^2 + D^2)$.
- Utilizzare la disuguaglianza appena mostrata per verificare che (0.16) vale per $f = u + iv \in S$, $u, v \in S_{\mathbb{R}}$.
- Verificare che si ha uguaglianza in (0.16) per la gaussiana $G(x) = e^{-x^2}$.

La gaussiana non sta in $S$, ma la disuguaglianza di Heisenberg può essere facilemnte estesa (per densità) a tutto $L^2(\mathbb{R})$. La disuguaglianza dà una versione quantitativamente precisa del fenomeno secondo cui, se $f$ sta in $L^2(\mathbb{R})$, allora $f$ e $\hat{f}$ non possono essere entrambe concentrate vicino a un punto. (Nel caso considerato qui, non si può avere che $f$ è concentrata vicino a $x = 0$ e $\hat{f}$ è concentrata vicino a $\zeta = 0$).

(4) L'esercizio dà una versione più precisa della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in $L^2(\mathbb{R})$, .

$$\left(\int_\alpha^\beta f(x)^2dx\right)\cdot\left(\int_\alpha^\beta g(x)^2dx\right)\geq\left(\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx\right)^2, \tag{0.17}$$

con $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ per cui gli integrali abbiano senso.

- Dati $A,B,C,D\in\mathbb{R}$, verificare che

$$(A^2+B^2)\cdot(C^2+D^2)=(AC+BD)^2+(AD-BC)^2. \tag{0.18}$$

- Estendere la disuguaglianza (0.18) mostrando che se $a_1,\dots,a_N;b_1,\dots,b_N\in\mathbb{R}$, allora:

$$\left(\sum_{j=1}^N a_j^2\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^N b_j^2\right)=\left(\sum_{j=1}^N a_jb_j\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^N\sum_{k=1}^N(a_jb_k-b_ja_k)^2. \tag{0.19}$$

- Utilizzando la definizione di integrale, dedurre da (0.19) che, se $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ sono continue, allora

$$\left(\int_\alpha^\beta f(x)^2dx\right)\cdot\left(\int_\alpha^\beta g(x)^2dx\right)=\left(\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx\right)^2+\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\int_\alpha^\beta(f(x)g(y)-g(x)f(y))^2\,dxdy \tag{0.20}$$

- Dedurre da (0.20) che abbiamo uguaglianza nella disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (0.17) se e solo se $f$ e $g$ sono proporzionali; cioè se esistono $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, non entrambi nulli, tali che $\lambda f+\mu g=0$.
- Con un passaggio al limite si mostra che la formula (0.20) vale anche nel caso di $\alpha=-\infty$, $\beta=+\infty$. Utilizzarla in congiunzione con (0.14) per dimostrare che il caso di uguaglianza nel principio di indeterminazione di Heisenberg (0.16) vale per una funzione $h$ se e solo se esiste una costante $K\in\mathbb{R}$ tale che vale l'equazione differenziale:

$$xh(x)=Kh'(x). \tag{0.21}$$

  **Suggerimento.** Se si vuole mostrare che $h$ verifica l'uguaglianza per il principio di Heisenberg, porre $f(x)=xh(x)$ e $g(x)=h'(x)$ in (0.20).
- Trovare le soluzioni di (0.22) e verificare che si tratta di gaussiane.

Le considerazioni dimostrate qui sopra possono essere estese in diverse direzioni, presentate in forma di ulteriore esercizio.

- Estendere la relazione (0.19) al caso complesso:

$$\sum_{j=1}^N|z_j|^2\cdot\sum_{j=1}^N|w_j|^2=\left|\sum_{j=1}^N z_j\overline{w_j}\right|^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^N\sum_{k=1}^N|z_jw_k-w_jz_k|^2. \tag{0.22}$$

- Quale formula integrale si ottiene da (0.22)?
- Sia $S$ lo spazio definito nell'esercizio (3). Mostrare che se $h\in S$ allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(x)|^2\,dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}x(h(x)\overline{h'(x)}+\overline{h(x)}h'(x))dx=-2\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\Re(h(x)h'(x))dx. \tag{0.23}$$

- Mostrare che per $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $f,g\in S$, vale la formula:

$$\int_\alpha^\beta|f(x)|^2dx\cdot\int_\alpha^\beta|g(x)|^2dx=\left|\int_\alpha^\beta f(x)\overline{g(x)}dx\right|^2+\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\int_\alpha^\beta|f(x)g(y)-g(x)f(y)|^2\,dxdy \tag{0.24}$$

Se siete diligenti, a questo punto potete mostrare che le uniche funzioni per cui si ha uguaglianza nella "disuguaglianza di Heisenberg" traslata,

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}\leq\int_{-\infty}^{+\infty}|(x-a)f(x)|^2dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}|(\zeta-b)\hat{f}(\zeta)|^2d\zeta \tag{0.25}$$

sono i *pacchetti d'onda:*

$$f(x)=K\cdot e^{ibx}e^{-\gamma(x-a)^2}, \tag{0.26}$$

con $K\in\mathbb{R}$ e $\gamma>0$ costanti. Di qui si potrebbe partire per una discussione delle *wavelets*.

**(5)** Cerchiamo di convincerci che la FFT è facile da capire.
Fissato $N \geq 0$ naturale, sia $I_N = \{0, 1, 2, \ldots, 2^N - 1\}$. Identifichiamo con $\mathbb{C}^{2^N}$ l'insieme delle funzioni $f : I_N \to \mathbb{C}$:

$$f \equiv (f(0), f(1), \ldots, f(2^N - 1)) \in \mathbb{C}^{2^N}. \tag{0.27}$$

Consideriamo la trasformata di Fourier discreta (DFT) $\mathcal{F}_N$ di ordine $2^N$. Se $f : I_N \to \mathbb{C}$, allora

$$\mathcal{F}_N f(k) = \sum_{j=0}^{2^N - 1} f(k) e^{-2\pi i \frac{jk}{2^N}}. \tag{0.28}$$

- Per $N \geq 0$ consideriamo le proiezioni $\Pi_0^N : \mathbb{C}^{2^N} \to \mathbb{C}^{2^{N-1}}$ e $\Pi_1^N : \mathbb{C}^{2^N} \to \mathbb{C}^{2^{N-1}}$,

$$\Pi_0^N(f)(j) = f(2j) \text{ per } j = 0, \ldots, 2^{N-1} - 1; \ \Pi_1^N(f)(j) = f(2j+1) \text{ per } j = 0, \ldots, 2^{N-1} - 1. \tag{0.29}$$

Sia inoltre $e_N \in \mathbb{C}^{2^N}$,

$$e_N(k) = e^{-2\pi i \frac{k}{2^N}}. \tag{0.30}$$

Mostrare che vale la formula ricorsiva:

$$\begin{cases} \mathcal{F}_N f = \mathcal{F}_{N-1}(\Pi_0^N(f)) + e_N \cdot \mathcal{F}_{N-1}(\Pi_1^N(f)) \\ \mathcal{F}_0 f = \mathcal{F}_0 f(0) = f(0). \end{cases} \tag{0.31}$$

- Sia $C_N$ il numero di moltiplicazioni non banali (cioè, in cui uno dei due fattori non sia pari a 1) che sono necessarie a calcolare $\mathcal{F}_N f$ utilizzando l'algoritmo (0.31). Mostrare che

$$\begin{cases} C_0 = 0 \\ C_N = 2C_{N-1} + 2^N - 1. \end{cases} \tag{0.32}$$

- Ricavare da (0.32) che

$$C_N = (N-1)2^N + 1 \sim N 2^N. \tag{0.33}$$

Osserviamo che la definizione (0.28) ci darebbe $O(2^{2N})$ moltiplicazioni non banali (mi pare che siano $2^{2N} - 2^N(N+2)/2$). Posto $n = 2^N$, l'algoritmo veloce (0.31) prevede $O(n \log n)$ moltiplicazioni, mentre l'applicazione pedisseque della definizione ne prevede $O(n^2)$.

ES (1) Abbondanti cenni di ~~[illegible]~~ svolgimento.

(i) $T$ è lineare: $T(\alpha f+\beta g) = \alpha T(f)+\beta T(g)$ se $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ e $f,g \in L^2$:

$$T(\alpha f+\beta g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (\alpha f(t)+\beta g(t))\,dt = \alpha \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt + \beta\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt$$

$$= \alpha\, T(f)(x) + \beta\, T(g)(x)$$

(ii) Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, allora $\|Tf\|_{L^2}^2 =$

$$= \int_0^\infty (Tf(x))^2\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy \cdot \frac{1}{x}\int_0^x f(z)\,dz\,dx$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(y)\,f(z)}{x^2}\cdot 1_{\{(x,y,z):\ x\ge 0;\ 0\le y\le x;\ 0\le z\le x\}}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty f(y)\cdot f(z)\left\{\int_{\{x\ge 0:\ x\ge y \text{ e } x\ge z\}} \frac{dx}{x^2}\right\} dy\,dz$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty f(y)\cdot f(z)\cdot\left\{\int_{\max(y,z)}^{\infty} \frac{dx}{x^2}\right\} dy\,dz$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty f(y)\,f(z)\cdot \frac{1}{\max(y,z)}\,dy\,dz$$

$$= \iint_{\{(y,z):\ y\ge z\}} \frac{f(y)\,f(z)}{\max(y,z)}\,dy\,dz + \iint_{\{(y,z):\ y\le z\}} \frac{f(y)\,f(z)}{\max(y,z)}\,dy\,dz$$

$$= \int_0^\infty dy\cdot f(y)\frac{1}{y}\int_0^y f(z)\,dz + \int_0^\infty dz\, f(z)\,\frac{1}{z}\int_0^z f(y)\,dy$$

$$= 2\cdot\int_0^\infty f(y)\cdot\left\{\frac{1}{y}\int_0^y f(z)\,dz\right\} dy \le$$

$$\le 2\cdot\left(\int_0^\infty f(y)^2\,dy\right)^{1/2}\cdot\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{y}\int_0^y f(z)\,dz\right)^2 dy\right)^{1/2}$$

$$= 2\cdot \|f\|_{L^2}\cdot\|Tf\|_{L^2}$$

Cauchy-Schwarz

Concludendo $\|T'f\|_{L^2}$ (se è finito) ho

$$\|T'f\|_{L^2} \le 2\cdot\|f\|_{L^2}.$$

almeno se $f(x)=0$ $\forall x<0$.

La disuguaglianza più generale segue subito.

ES (2) Mostra che $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n+1}}{n+1} = \log(1-r)^{-1}$.

Sia $\displaystyle h(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n+1}}{n+1}$, $h: (-1,1) \to \mathbb{R}$.

Allora $h(0)=0$ e $\displaystyle h'(r) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} = (1-r)^{-1}$

$$\Rightarrow h(r) = h(r)-h(0) = \int_0^r h'(t)\,dt = \int_0^r \frac{dt}{1-t} = \left[\log(1-t)^{-1}\right]_0^r = \log(1-r)^{-1}.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n+1} = \frac{1}{r}\,h(r) = \frac{1}{r}\log\frac{1}{1-r}.$$

La convergenza di (0.5) segue dal suggerimento:

Se $|z|\le r \Rightarrow \displaystyle\left|\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - \sum_{n=0}^{M-1} a_n z^n\right| = \left|\sum_{n=M}^{N} a_n z^n\right|$

$$\le \left(\sum_{n=M}^{N} (n+1)|a_n|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{r}\cdot\log\frac{1}{1-r}\right)^{1/2}$$

Poiché $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)|a_n|^2$ converge,

$$\sum_{n=M}^{N} (n+1)|a_n|^2 = \left|\sum_{n=0}^{N} (n+1)|a_n|^2 - \sum_{n=0}^{M-1} (n+1)|a_n|^2\right| \xrightarrow[N,M\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow \displaystyle\left\{\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\right\}_{N=0}^{\infty}$ è di Cauchy in $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ converge.

Nucleo. Usando (0.11) e il suggerimento,

$$\overline{c_n(w)} = w^n, \text{ quindi } c_n(w) = \frac{\overline{w^n}}{n+1} = \frac{\overline{w}^n}{n+1} \text{ e}$$

$$K_w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{w}^n z^n}{n+1} = \frac{1}{\overline{w} z} \cdot \log \frac{1}{1-\overline{w} z}.$$

Per la proprietà riproducente (0.11) ho che

$$\langle K_w, K_w \rangle_{\mathcal{D}} = K_w(w) = \frac{1}{|w|^2} \cdot \log \frac{1}{1-|w|^2}$$

Funzionale di valutazione.

$$|\eta_w(f)| = |f(w)| = |\langle f, K_w \rangle_{\mathcal{D}}|$$
$$\leq \|f\|_{\mathcal{D}} \cdot \|K_w\|_{\mathcal{D}} = \|f\|_{\mathcal{D}} \cdot \left(\frac{1}{|w|^2} \log \frac{1}{1-|w|^2}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \|\eta_w\|_{\mathcal{D}^*} \overset{\text{Df.}}{=} \sup_{f \neq 0} \frac{|\eta_w(f)|}{\|f\|_{\mathcal{D}}} \leq \|K_w\|_{\mathcal{D}} = \left(\frac{1}{|w|^2} \log \frac{1}{1-|w|^2}\right)^{1/2}.$$

Ho anche $\|\eta_w\|_{\mathcal{D}^*} \geq \dfrac{|\eta_w(K_w)|}{\|K_w\|_{\mathcal{D}}} = \dfrac{K_w(w)}{\sqrt{K_w(w)}}$ (perché?)

$$= \sqrt{K_w(w)} = \left(\frac{1}{|w|^2} \log \frac{1}{1-|w|^2}\right)^{1/2}.$$