16 novembre 2012 - ingegneria gestionale - Proff. Arcozzi - Baldi - I prova parziale Analisi Matematica TA 451726

NOME e COGNOME:... MATRICOLA: ....

---

(1) [1,5 pti] Siano $(a_n)_{n\in N}$, $(b_n)_{n\in N}$, $(c_n)_{n\in N}$ successioni in $\mathbb{R}$. Dire quale tra le seguenti affermazioni è *falsa*.

1. Se esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ allora esiste $\lim_{n\to+\infty} a_{n-1} - l = 0$.
2. Se la successione $(a_n)_{n\in N}$ è crescente allora esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.
3. Se $a_n \leq 5$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e la successione è decrescente allora esiste reale $\lim_{n\to+\infty} a_n$.
4. Se esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n \geq 0$ ed esiste $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ e $a_n \leq c_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora esiste $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$.

(2) [1,5 pti] Sia $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e si supponga che $f(-2) = 2$, $f(2) = 1$. Quale delle seguenti affermazioni *segue necessariamente* dalle ipotesi?

1. Se $x = -2$ è un punto di massimo per f, allora per ogni x in $]-2,2]$ si ha che $f(x) < 2$.
2. Esiste $x \in]-2,2[$ tale che $f(x) = x$.
3. f ha un punto di minimo in $[-2,2)$.
4. Per ogni x in $[-2,2]$, si ha che $f(x) \geq 0$.

(3) [1,5 pti] Verificare, mediante la definizione, che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{n^2+3n} = 2$.

Svolgere gli esercizi seguenti riportando i passaggi principali.

(1) [3 pti] Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, tale che $g(\sqrt[4]{2}) = 2$, $g(\sqrt[4]{4}) = 4$, $g'(\sqrt[4]{2}) = 0$ e $g'(\sqrt[4]{4}) = \sqrt[4]{2}$,. Posto

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h(x) = \log\left(x^2+4\right) \cdot g\left(\sqrt[4]{x^4+2}\right) ,$$

calcolare $h'(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e successivamente calcolare $h'(\sqrt[4]{2})$.

(2) [2.5 pti] Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{(25)^n+2n}-\sqrt{(25)^n-2n}\right)(5^n+(-1)^n)}{25n+2\log(n)}$.

(3) [2.5 pti] Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\left[x^2\log\left(x^3\right)+\frac{e^{\sqrt{4x}}-e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right].$$

(4) [2.5 pti] Trovare il dominio naturale della funzione q,

$$q(x)=\sqrt{\log(x)\cdot\frac{2-x}{x-4}}.$$

AMTA – I prova parziale – 16/11/2012

SVOLGIMENTO

(1) L'affermazione (3) è falsa: $a_n = -n \le 5 \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\{a_n\}$ è decrescente, ma $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \notin \mathbb{R}$.

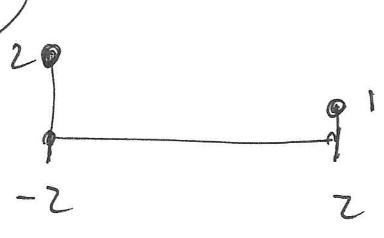
L'affermazione (1) è vera: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1}$

L'affermazione (2) è vera: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n}$

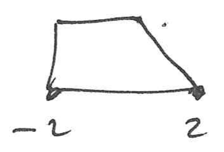
se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ e $\lim_{n\to\infty} a_n$ esiste perché $\{a_n\}$ è crescente. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, allora $a_n < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ (poiché $\{a_n\}$ cresce), dunque $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$.

L'affermazione (4) segue dal Teorema del confronto (che implica $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n = 0$, dunque che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$) e dal Teorema dei due carabinieri.

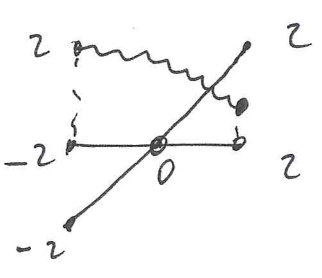
(2)



(1) è falsa:

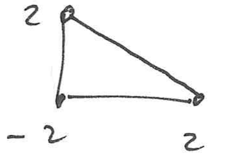


(2) è vera:

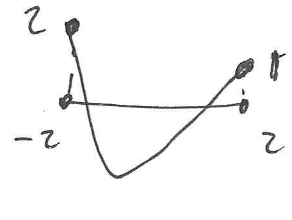


applicando il T. degli zeri a $g(x) = f(x) - x$.

(3) è falsa:



(4) è falsa:



(3) Fisso $\varepsilon > 0$ e cerco $n \in \mathbb{N}$:

$$\varepsilon \geq \left| \frac{2n^2}{n^2+3n} - 2 \right| = \left| \frac{-6n}{n^2+3n} \right| = \frac{6n}{n^2+3n} \quad \left(\text{perché } n \geq 0\right)$$

$$\frac{6}{n+3}$$

~~cioè~~ $\cancel{n+3 \geq \frac{6}{\varepsilon}}$

cioè $\quad n+3 \geq \frac{6}{\varepsilon} \iff n \geq \frac{6}{\varepsilon} - 3.$

Per ogni $\varepsilon > 0$, se $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq \frac{6}{\varepsilon} - 3$, allora $\left|\frac{2n^2}{n^2+3n} - 2\right| \leq \varepsilon$

cioè: $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2} = 2.$

(4) Svolti. (1) $h(x) = \log(x^2+4) \cdot g\left(\sqrt[4]{x^4+2}\right) =$

$$= \log(x^2+4) \cdot g\left((x^4+2)^{1/4}\right)$$

$$\Rightarrow h'(x) = \frac{2x}{x^2+4} \cdot g\left((x^4+2)^{1/4}\right) + \log(x^2+4) \cdot g'\left((x^4+2)^{1/4}\right) \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4x^3}{(x^4+2)^{3/4}}$$

$$= \frac{2x}{x^2+4} \cdot g\left((x^4+2)^{1/4}\right) + \log(x^2+4) \cdot g'\left((x^4+2)^{1/4}\right) \cdot \frac{x^3}{(x^4+2)^{3/4}}$$

$$\Rightarrow h'(\sqrt[4]{2}) = h'(2^{1/4}) = \frac{2 \cdot 2^{1/4}}{2^{1/2}+4} \cdot g(4^{1/4}) + \log(2^{1/2}+4) \cdot g'(4^{1/4}) \cdot \frac{2^{3/4}}{4^{3/4}}$$

$$= \frac{2 \cdot 2^{1/4}}{2^{1/2}+4} \cdot g(2^{1/2}) + \log(2^{1/2}+4) \cdot g'(2^{1/2}) \cdot \frac{2^{3/4}}{2^{3/2}}$$

$$= \frac{2 \cdot 2^{1/4}}{2^{1/2}+4} \cdot 4 + \log(2^{1/2}+4) \cdot \frac{2^{1/4} \cdot 2^{3/4}}{2^{3/2}}$$

$$= \frac{8 \cdot 2^{1/4}}{4+2^{1/2}} + \log(2^{1/2}+4) \cdot \frac{1}{2^{1/2}}$$

(2) $$\frac{\sqrt{(25)^n+2n}-\sqrt{(25)^n-2n}}{25n+2\cdot\log(n)}\left(5^n+(-1)^n\right)=$$

$$=\frac{4n}{\sqrt{(25)^n+2n}+\sqrt{(25)^n-2n}}\cdot\frac{5^n+(-1)^n}{25n+2\log(n)}$$

$$=\frac{4n}{25n+o(n)}\cdot\frac{5^n+o(5^n)}{5^n\cdot\sqrt{1+o(1)}+5^n\cdot\sqrt{1+o(1)}}$$

$$=\frac{4}{25+o(1)}\cdot\frac{1+o(1)}{1+o(1)+1+o(1)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{2}{25}$$

(3) Posto $y=\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to 0+]{}+\infty$: $\quad x^2\cdot\log(x^3)=y^{-2}\log(y^{-3})$

(deve essere $x>0$ perchè altrimenti $\log(x^3)$ non esiste)

$$=\frac{-3\log(y)}{y^2}\xrightarrow[y\to+\infty]{}0$$

Per l'altro addendo: $$\frac{e^{\sqrt{4x}}-e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=$$

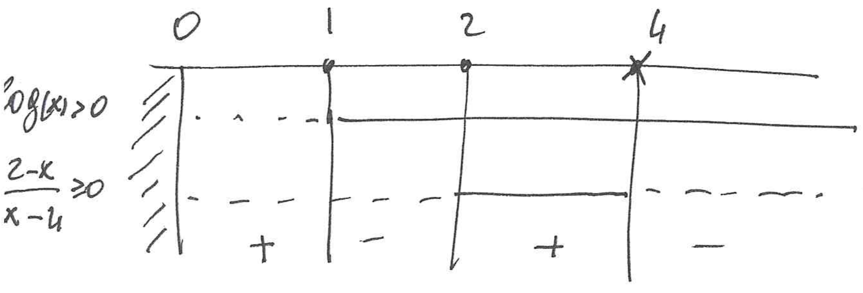
$$=e^{-\sqrt{x}}\cdot\frac{e^{\sqrt{4x}+\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}=e^{-\sqrt{x}}\cdot\frac{e^{3\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}$$

$$\underset{x\to 0}{\sim}\frac{e^{3\sqrt{x}}-1}{3\sqrt{x}}\cdot 3\xrightarrow[x\to 0]{}3$$

(posso anche sostituire $z=\sqrt{x}\xrightarrow[x\to 0]{}0$)

Il limite è dunque $0+3=3$.

(4) Devo avere $x\neq 4$; $x>0$; $\log(x)\cdot\frac{2-x}{x-4}\geq 0$.



Dominio$(f)=$

$=(0,1]\cup[2,4)$