EQUAZIONI DIFFERENZIALI

§1. Equazioni differenziali del I ordine: generalità

<u>Def.</u> Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$. Una <u>soluzione</u> dell'<u>equazione differenziale del I ordine</u>

$$(E) \qquad \dot{x} = f(t,x)$$

è una funzione $I \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ dove

(i) $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo e $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R})$, I aperto;

(ii) $\forall t \in I \Rightarrow (t, \varphi(t)) \in \Omega$ e $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$.

<u>Def.</u> Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$, $(t_0, x_0) \in \Omega$.
Una <u>soluzione</u> del <u>problema di Cauchy</u> per (E) con <u>condizioni iniziali</u> (CI) $x(t_0) = x_0$,

$$(PC) \begin{cases} (E) & \dot{x} = f(t,x) \\ (CI) & x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

è una soluzione $I \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ di (E) tale che $t_0 \in I$ e $\varphi(t_0) = x_0$.
Cioè: (i) $t_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo aperto e $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R})$;

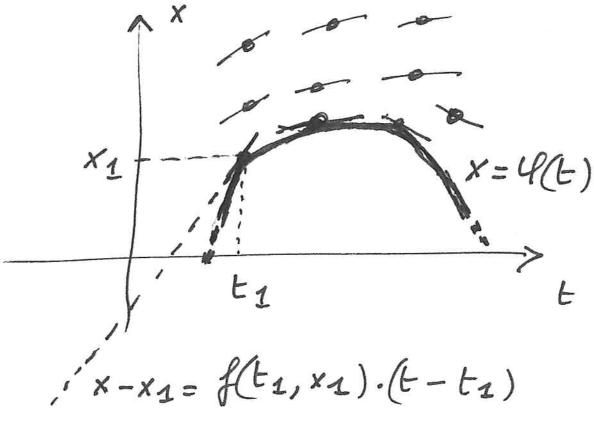
(ii) $\forall t \in I \Rightarrow (t, \varphi(t)) \in \Omega$ e $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$

(iii) $\varphi(t_0) = x_0$

<u>Teorema</u>. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto; $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$; $(t_0, x_0) \in \Omega$.
Allora $\exists\, I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto, $t_0 \in I$, e $\exists\, \varphi \in C^1(I, \mathbb{R})$ t.c. φ è soluzione di (PC).

<u>Interpretazione geometrica</u>. A ogni $(t_1, x_1) \in \Omega$ associo la retta per (t_1, x_1) avente coefficiente angolare $f(t_1, x_1) \in \mathbb{R}$:

$$(\star) \qquad x - x_1 = f(t_1, x_1) \cdot (t - t_1)$$



Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ e $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R})$, I intervallo.

- Il grafico di φ è tangente alle rette $(\star)$ $\forall t_1 \in I \Leftrightarrow$
- Le rette tangenti al grafico di φ per $t = t_1$, $(\star\star)$ $x - \varphi(t_1) = \dot{\varphi}(t_1) \cdot (t - t_1)$ è una retta del tipo $(\star)$ $\Leftrightarrow$
- $\forall t_1 \in I$: $\dot{\varphi}(t_1) = f(t_1, x_1)$ con $x_1 = \varphi(t_1) \Leftrightarrow$
- $\forall t_1 \in I$: $\dot{\varphi}(t_1) = f(t_1, \varphi(t_1)) \Leftrightarrow \varphi$ è sol. di (E).

Cioè: le soluzioni di (E) sono quelle funzioni $\varphi: I \to \mathbb{R}$ il cui grafico è – punto per punto – tangente alle rette della forma (*).

<u>Esempio</u> di come nasce un'equazione differenziale.

t: tempo (in giorni); $x(t)$: popolazione di batteri in una coltura al tempo t (numero).

Osservazioni sperimentali: se $h>0$ è "piccolo", esiste $k>0$ ("piccolo") t.c.

$$x(t+h) \simeq x(t) + k\cdot x(t)$$
$$x(t+2h) \simeq x(t) + 2k\cdot x(t)$$
$$\vdots$$

"$\simeq$" significa: uguale entro la precisione degli strumenti.

$$x(t+nh) \simeq x(t) + n\cdot k\cdot x(t),$$ purché $n \in \mathbb{N}$ sia abbastanza "piccolo".

Pongo $nh = \Delta t$, così che $nk = nh\cdot\frac{k}{h} = \frac{k}{h}\Delta t$ e

$$x(t+\Delta t) \simeq x(t) + \frac{k}{h}\cdot\Delta t\cdot x(t),$$

che posso pensare anche come

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \frac{k}{h}\cdot\Delta t\cdot x(t) + \underset{\Delta t\to 0}{o}(\Delta t)$$

(ipotizzando che la quantità osservata $nk = \frac{k}{h}\Delta t$ siano piccole, ma sostanzialmente più grandi dell'errore delle misure).

Quindi,

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = \frac{k}{h}\cdot\frac{\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}}\,x(t) + \frac{\underset{\Delta t\to 0}{o}(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\downarrow{\scriptstyle \Delta t\to 0} \qquad\qquad \downarrow{\scriptstyle \Delta t\to 0}$$

$$\dot{x}(t) \qquad\qquad \frac{k}{h}\cdot x(t)$$

Cioè, la funzione $t \mapsto x(t)$ soddisfa

$$\dot{x}(t) = \frac{k}{h}\,x(t).$$

§2 - Equazioni differenziali lineari del I ordine.

Def: Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo (aperto) e $a, g \in C(I, \mathbb{R})$.
Una soluzione dell'equazione differenziale lineare

$$(EL) \quad \dot{x} + a(t) \cdot x = g(t)$$

è una funzione $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R})$: $\forall t \in I \Rightarrow \dot{\varphi}(t) + a(t) \cdot \varphi(t) = g(t)$.

OSS. Notare che φ è definita sull'intervallo I su cui a e g hanno senso: è una soluzione "globale".

Risolvo (EL). Sia $t_0 \in I$ e sia $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$, $t \in I$.

Per T.F.C.I., $A \in C^1(I, \mathbb{R})$ e $\dot{A}(t) = a(t)$ $\forall t \in I$.

Ho che (EL) $\Longleftrightarrow$

$$e^{A(t)} \cdot g(t) = e^{A(t)} \cdot (\dot{x}(t) + a(t) \cdot x(t))$$

$$= e^{A(t)} \cdot \dot{x}(t) + e^{A(t)} \cdot a(t) \cdot x(t)$$

derivata della composizione $e^{A(t)}$

$$\stackrel{\nearrow}{=} e^{A(t)} \cdot \dot{x}(t) + \frac{d}{dt}\left[e^{A(t)}\right] x(t)$$

derivata di un prodotto

$$\stackrel{\nearrow}{=} \frac{d}{dt}\left[e^{A(t)} \cdot x(t)\right]$$

$$\Longleftrightarrow \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} g(s)\, ds = e^{A(t)} \cdot x(t) - e^{A(t_0)} \cdot x(t_0)$$

per T.F.C.I.

$$= e^{A(t)} \cdot x(t) - x(t_0); \text{ poiché } A(t_0) = 0$$

$$\Longleftrightarrow x(t) = e^{-A(t)} \cdot \left[x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} g(s)\, ds\right]$$

Teorema (i) Sia $\varphi : I \to \mathbb{R}$ definita da

$$(*) \quad \varphi(t) = k \cdot e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \cdot \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} \cdot g(s)\, ds,$$

dove $k \in \mathbb{R}$ e $t_0 \in I$ sono fissati. Allora, φ è una soluzione di (EL), ~~l'unica con $\varphi(t_0) = k$~~.

ii) Viceversa, sia $t_0 \in I$ fissato e sia φ sol. di (EL). Allora, esiste $k \in \mathbb{R}$: φ ha la forma $(*)$.

(iii) L'unica soluzione del problema di Cauchy

$$(PC) \begin{cases} (EL) & \dot{x} + a(t) x = g(t) \\ (CI) & x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

è

$$\begin{cases} \varphi \in C^1(I, \mathbb{R}), \\ \varphi(t) = e^{-A(t)} \cdot \left[x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{+A(s)} g(s)\, ds\right] \end{cases}$$

OSSERVAZIONI / COMPLEMENTI Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $a, g \in C(I, \mathbb{R})$ come sopra. L'equazione omogenea associata a (EL) è

$$(ELO) \qquad \dot{z} + a(t) \cdot z = 0.$$

OSS. (i) (ELO) si ottiene da (EL) ponendo $g = 0$, quindi le sue soluzioni sono $\psi \in C^1(I, \mathbb{R})$; $\psi(t) = K \cdot e^{-A(t)}$, con $K \in \mathbb{R}$ fissato e $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$ come sopra, con $t_0 \in \mathbb{R}$ fissato.

(ii) Abbiamo le seguenti proprietà:

(1) φ_1, φ_2 soluz. di (EL) $\Rightarrow$ $\varphi_1 - \varphi_2$ è sol. di (ELO)

(2) ψ_1, ψ_2 sol. di (ELO) e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2$ è sol. di (ELO)

(3) φ sol. di (EL) e ψ sol. di (ELO) $\Rightarrow$ $\varphi + \psi$ è sol. di (ELO)

(4) Se φ è sol. di (EL) e φ_1 è sol. di

$$(EL_1) \quad \dot{x} + a(t)\, x = g_1(t), \quad \text{con } g_1 \in C(I, \mathbb{R}),$$

allora $\varphi + \varphi_1$ è sol. di (EL^*) $\dot{x} + a(t) x = g_1(t) + g(t)$

e se $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \varphi$ è sol. di $(EL^{\oplus})$ $\dot{x} + a(t) x = \alpha \cdot g(t)$

Le (1)-(4) si possono dimostrare usando la forma esplicita delle soluzioni, ma anche solo usando la forma dell'equazione. Vediamo p. es. la (2):

Per le proprietà delle derivate,

$$(\alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2)^{\cdot} = \alpha_1 \dot{\psi}_1 + \alpha_2 \dot{\psi}_2 .$$

Ho quindi che, se $\chi = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2$,

$$\begin{aligned}
\dot{\chi} + a(t)\chi &= (\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2)^{\cdot} + a(t) \cdot (\alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2) \\
&= \alpha_1 \dot{\psi}_1 + \alpha_2 \dot{\psi}_2 + a(t)\, \alpha_1 \psi_1 + a(t)\, \alpha_2 \psi_2 \\
&= \alpha_1 \cdot [\dot{\psi}_1 + a(t) \psi_1] + \alpha_2 \cdot [\dot{\psi}_2 + a(t) \psi_2] \\
&= \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 \qquad \text{poiché } \psi_1, \psi_2 \text{ sono sol. di (ELO)} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

quindi χ è sol. di (ELO), come si voleva. ■

<u>Def.</u> L'<u>integrale generale</u> di (EL) è l'insieme di tutte le soluzioni di (EL),

$$IG(EL) = \{\varphi \in C^1(I,\mathbb{R}) : \varphi \text{ è sol. di } (EL)\} \subseteq C^1(I,\mathbb{R}).$$

<u>Algebra lineare e equazioni differenziali lineari del I ordine.</u> Considero su $C^1(I,\mathbb{R})$ le operazioni

<u>somma</u>: $\forall p, q \in C^1(I,\mathbb{R})$: $p+q : I \to \mathbb{R}$, $(p+q)(t) = p(t) + q(t)$,
$p+q \in C^1(I,\mathbb{R})$;

<u>prodotto scalare x vettore</u>: $\forall p \in C^1(I,\mathbb{R})\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\lambda p : I \to \mathbb{R}$; $(\lambda p)(t) = \lambda \cdot p(t)$,
$\lambda p \in C^1(I,\mathbb{R})$.

Ho che $(C^1(I,\mathbb{R}); +; \cdot)$ è uno spazio vettoriale.

Sia $a \in C(I,\mathbb{R})$ e (ELO) $\dot{z} + a(t)\cdot z = 0$.

La proprietà (2) a p.4 può essere formulata così:

$$\boxed{\text{L'integrale generale di (ELO), } IG(ELO), \text{ è un sottospazio vettoriale di } C^1(I,\mathbb{R}).}$$

Che dimensione ha?

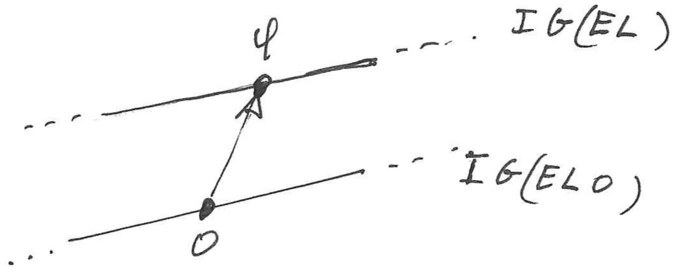
Sia $\psi \in C^1(I,\mathbb{R})$, $\psi(t) = e^{-A(t)}$ come nei conti a p. 3.

Sia $\chi \in C^1(I,\mathbb{R})$: $\chi \in IG(ELO) \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} : \chi = k\cdot\psi$

cioè, $IG(ELO)$ è lo spazio vettoriale generato da ψ in $C^1(I,\mathbb{R})$

$$\boxed{\dim(IG(ELO)) = 1}$$

Sia φ una soluz. di (EL). Per (1), (3) a p.4, ogni altra soluzione di (EL) ha la forma $\varphi_1 = \varphi + \psi$ $(\psi \in IG(ELO))$.



← $IG(EL)$ è una "retta" parallela a $IG(ELO)$ in $C^1(I,\mathbb{R})$.

Esercizi / Esempi

(1) $\dot{x} - 3x = 0$: eq. diff. lineare, omogenea; $a(t) = -3$, $a \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$A(t) = \int_0^t (-3)\,ds = -3t$$

$$0 = e^{-3t}\dot{x}(t) - 3e^{-3t}x(t) = e^{-3t}\dot{x}(t) + \frac{d}{dt}(e^{-3t}) \cdot x(t)$$

$$= \frac{d}{dt}\left[e^{-3t} \cdot x(t)\right] \iff \exists k \in \mathbb{R} : \quad e^{-3t} \cdot x(t) = k$$

$$\iff x(t) = k \cdot e^{3t}, \quad x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

L'integrale generale di $\dot{x} - 3x = 0$ è

$$\varphi(t) = k \cdot e^{3t}, \quad \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (k \in \mathbb{R} \text{ fissato}).$$

(2) $\dot{x} + tx = t$: lineare, non omog.; $a(t) = g(t) = t$; $a, g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$A(t) = \int_0^t s\,ds = t^2/2$$

$$t \cdot e^{t^2/2} = [\dot{x}(t) + t \cdot x(t)] \cdot e^{t^2/2} = e^{t^2/2}\dot{x}(t) + e^{t^2/2} \cdot t \cdot x(t)$$

$$= e^{t^2/2}\dot{x}(t) + \frac{d}{dt}\left(e^{t^2/2}\right) \cdot x(t) = \frac{d}{dt}\left[x(t) \cdot e^{t^2/2}\right]$$

$$\iff x(t) \cdot e^{t^2/2} = \int_0^t s \cdot e^{s^2/2}\,ds + k \qquad (\exists k \in \mathbb{R})$$

$$= \left[e^{s^2/2}\right]_0^t + k = e^{t^2/2} - 1 + k = e^{t^2/2} + H \qquad (\exists H \in \mathbb{R})$$

L'integrale generale di $\dot{x} + tx = t$ è

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad \varphi(t) = 1 + H \cdot e^{-t^2/2}$$

(3) Risolvere $\begin{cases} \dot{x} - \sin(t)\,x = \sin(t) \cdot e^{-\cos(t)} \\ x(\pi/2) = 2 \end{cases}$

$$a(t) = -\sin(t); \quad A(t) = \int_{\pi/2}^t -\sin(s)\,ds = \left[\cos(s)\right]_{\pi/2}^t = \cos(t) :$$

$\pi/2$ ← lo scelgo per com'è (CI)

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) \cdot e^{\cos(t)}\right] = [\dot{x} - \sin(t)x] \cdot e^{\cos(t)} = \sin(t) \cdot \underbrace{e^{-\cos(t)} \cdot e^{\cos(t)}}_{} = \sin(t)$$

$$x(t) \cdot e^{\cos(t)} - x(\pi/2) \cdot e^{\cos(\pi/2)} = \int_{\pi/2}^t \sin(s)\,ds = -\cos(t)$$

$$x(t) \cdot e^{\cos(t)} - 2 \cdot 1$$

La soluzione è $\boxed{\varphi(t) = e^{-\cos(t)} \cdot (2 - \cos t); \quad \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$

(4) $\begin{cases} \dot{x} + t x = 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$ come in (2), $A(t) = t^2/2$:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{t^2/2} \cdot x(t)\right] = e^{t^2/2} \cdot \left[\dot{x}(t) + t\, x(t)\right] = e^{t^2/2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{e^{t^2/2} \cdot x(t) - e^{0^2/2} \cdot x(0)}_{= \, e^{t^2/2} \cdot x(t)} = \int_0^t e^{s^2/2}\, ds$$

L'integrale $\int_0^t e^{s^2/2}\, ds$ non può essere scritto in termini di funzioni elementari, ma la funzione $t \mapsto \chi(t) = \int_0^t e^{s^2/2}\, ds$ è $\chi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, per T.F.C.I.

Ho dunque: $\varphi(t) = e^{-t^2/2} \cdot \int_0^t e^{s^2/2}\, ds$; $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, è la soluzione del problema di Cauchy.

(5) Tornando al problema "pratico" di p. 2; supponiamo che io sappia che la popolazione di batteri si evolve seguendo l'(ELO) $\dot{x} - \alpha x = 0$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ (a me incognito) e che la mia unica osservazione sia $x(1) = x(0) + p \cdot x(0)$, con $p > 0$ che ho ~~misurato~~ (p. es., $p = 10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$).

Quanti batteri ho dopo 1/2 giornata?

Cerco prima α. La soluzione di (ELO) è $x(t) = x(0) \cdot e^{\alpha t}$, quindi la mia osservazione dà:

$$x(0) + p \cdot x(0) = x(1) = x(0) \cdot e^{\alpha} \Longleftrightarrow e^{\alpha} = 1 + p \Longleftrightarrow \alpha = \log(1+p).$$

Ho quindi
$$x(t) = x(0) \cdot e^{t \log(1+p)} = (1+p)^t \cdot x(0).$$

Dopo 1/2 giornata ho: $x(1/2) = (1+p)^{1/2} \cdot x(0) = \sqrt{1+p} \cdot x(0)$ batteri, con un incremento su $x(0)$ di $x(1/2) - x(0) = \left[\sqrt{1+p} - 1\right] \cdot x(0)$ batteri. OSS. $\sqrt{1+p} - 1 \underset{p \to 0}{\sim} p/2$, ma $p > 0 \Rightarrow \sqrt{1+p} - 1 < p/2$.